

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$9(a^3b + b^3c + c^3a) + 1 \geq 4(ab + bc + ca).$$

Câu 2. (3,0 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_0 = 0, x_1 = 1$ và $x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng minh rằng biểu thức $\frac{x_{2n}}{x_n}$ là một số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $21x_n^2 + 4$ là

một số chính phương với mọi số tự nhiên n .

b) Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 0$ sao cho biểu thức $B_n = 21x_n^2 + 3$ là một số nguyên tố.

Câu 3. (3,0 điểm) Cho đa thức $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, với $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là các số thực và n là số nguyên dương lẻ. Biết rằng $P(0) + P(1) = 0$ và $P(x)$ có n nghiệm thực

$r_1, r_2, \dots, r_n$ thuộc $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \prod_{i=1}^n r_i$ theo n .

Câu 4. (3,0 điểm) Cho số nguyên dương $a > 1$ thỏa mãn $(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3$ là lập phương một số nguyên. Chứng minh rằng a chia hết cho 4.

Câu 5. (3,0 điểm) Sau khi thi tốt nghiệp trung học phổ thông, các em học sinh khối 12 của trường trung học phổ thông A đã hẹn nhau mỗi năm họp mặt một lần vào ngày hội trại của trường. Tuy nhiên qua 10 lần họp mặt thì nhận thấy mỗi lần họp mặt chỉ có đúng 20 thành viên tham dự và 2 lần họp mặt bất kỳ trong 10 lần họp mặt không có chung quá 2 thành viên. Hỏi khối 12 năm học đó của trường trung học phổ thông A có ít nhất bao nhiêu học sinh?

Câu 6. (5,0 điểm) Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . C là điểm trên nửa đường tròn sao cho $CA < CB$. Tiếp tuyến Ax của (O) cắt BC tại M . Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại N . Gọi F là giao điểm của AN và BM , D là giao điểm thứ hai của AN và (O) . Đường thẳng d đi qua M , song song với AB , cắt OC tại I . Đường thẳng d' đi qua N , song song với AB , cắt OD tại J . Gọi E là giao điểm của MN và OF .

a) Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của (O) và ba điểm I, J, E thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

HẾT

CHỌN ĐTQG CẦN THƠ 2026

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Cần Thơ TST - P1)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$9(a^3b + b^3c + c^3a) + 1 \geq 4(ab + bc + ca).$$

 Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = 1$ nên $a^3b + b^3c + c^3a \geq abc$.

Mặt khác, bất đẳng thức Schur bậc ba ta có $(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Vì $a+b+c=1$, suy ra $1+9abc \geq 4(ab+bc+ca)$. Từ đó ta suy ra được:

$$9(a^3b + b^3c + c^3a) + 1 \geq 9abc + 1 \geq 4(ab + bc + ca).$$

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Cần Thơ TST - P2)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_0 = 0, x_1 = 1$ và $x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

- ① Chứng minh rằng biểu thức $\frac{x_{2n}}{x_n}$ là một số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $21x_n^2 + 4$ là một số chính phương với mọi số tự nhiên n .
- ② Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 0$ sao cho biểu thức $B_n = 21x_n^2 + 3$ là một số nguyên tố.

 Lời giải.

Đặt $\alpha = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \beta = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$, ta có $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 1$ và $\alpha - \beta = \sqrt{21}$ và $x_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Đặt $y_n = \alpha^n + \beta^n$ thì $y_0 = 2, y_1 = 5$ và $y_{n+2} = 5y_{n+1} - y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ nên $y_n \in \mathbb{Z}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

- ① Với $n \geq 1$, có $x_{2n} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = x_n(\alpha^n + \beta^n) = x_n y_n$ nên $\frac{x_{2n}}{x_n} = y_n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Đồng thời } y_n^2 - 21x_n^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 - (\alpha^n - \beta^n)^2 = 4(\alpha\beta)^n = 4.$$

Vậy $21x_n^2 + 4 = y_n^2$ là một số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

- ② Ta có $B_n = 21x_n^2 + 3 = y_n^2 - 1 = (y_n - 1)(y_n + 1)$. Với $n = 0$, ta có $B_0 = 3$, là số nguyên tố.

Với $n \geq 1$, do $\beta = \alpha^{-1}$ và $\alpha > 1$, ta có $y_n = \alpha^n + \alpha^{-n} \geq \alpha + \alpha^{-1} = 5$.

Vì vậy cả hai thừa số $y_n - 1$ và $y_n + 1$ đều lớn hơn 1. Khi đó B_n là hợp số.

Vậy $n = 0$ là giá trị duy nhất sao cho B_n là số nguyên tố.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Cần Thơ TST - P3)

Cho đa thức $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, với $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là các số thực và n là số nguyên dương lẻ. Biết rằng $P(0) + P(1) = 0$ và $P(x)$ có n nghiệm thực $r_1, r_2, \dots, r_n$ thuộc $[0; 1]$.

Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \prod_{i=1}^n r_i$ theo n .

Vì P là đa thức monic bậc n và có đủ n nghiệm thực kể cả bội nên $P(x) = \prod_{i=1}^n (x - r_i)$.

Do đó ta có $P(0) = -\prod_{i=1}^n r_i = -Q$, $P(1) = \prod_{i=1}^n (1 - r_i)$, kết hợp $P(0) + P(1) = 0$ cho ta $Q = \prod_{i=1}^n (1 - r_i)$.

Vì thế $Q^2 = \prod_{i=1}^n r_i(1 - r_i) \leq \prod_{i=1}^n \frac{1}{4} = 4^{-n}$ do $r_i(1 - r_i) \leq \frac{1}{4}$ với mọi $r_i \in [0, 1]$. Vậy $Q \leq 2^{-n}$.

Dấu bằng đạt được khi $r_1 = r_2 = \dots = r_n = \frac{1}{2}$, tức là với $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$. Vậy $Q_{\max} = 2^{-n}$.

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Cần Thơ TST - P4)

Cho số nguyên dương $a > 1$ thỏa mãn $(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3$ là lập phương một số nguyên. Chứng minh rằng a chia hết cho 4.

Lời giải.

Ta có $(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 = 3a(a^2 + 2)$. Giả sử $3a(a^2 + 2) = m^3$ với m nguyên dương.

Trước hết, ta chứng minh a chẵn. Giả sử ngược lại a lẻ. Khi đó $\gcd(a, a^2 + 2) = \gcd(a, 2) = 1$.

Ta xét hai trường hợp:

- ♦ Nếu $3 \mid a$ thì $a^2 + 2 \equiv 2 \pmod{3}$, do đó $\gcd(3a, a^2 + 2) = 1$ nên $3a$ và $a^2 + 2$ đều phải là lập phương. Nhưng $a^2 + 2 \equiv 2 \pmod{9}$, trong khi các số lập phương modulo 9 chỉ có thể đồng dư với 0, 1, 8.

Vì vậy trường hợp này không xảy ra.

- ♦ Nếu $3 \nmid a$ thì $\gcd(a, 3(a^2 + 2)) = 1$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương u, v sao cho

$$a = u^3, \quad 3(a^2 + 2) = v^3.$$

Vì $3 \nmid u$, ta có $a = u^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$, nên $a^2 + 2 \equiv 3 \pmod{9}$, do đó $3 \mid v_3(3(a^2 + 2)) = 2$, vô lý.

Vậy a chẵn. Nếu $a \equiv 2 \pmod{4}$, viết $a = 2u$ với u lẻ. Khi đó $a^2 + 2 = 2(2u^2 + 1)$ và $2u^2 + 1$ là số lẻ.

Suy ra $3 \mid v_2(3a(a^2 + 2)) = v_2(3a) + v_2(a^2 + 2) = 1 + 1 = 2$, vô lý.

Vì vậy a chia hết cho 4.

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Cần Thơ TST - P5)

Sau khi thi tốt nghiệp trung học phổ thông, các em học sinh khối 12 của trường trung học phổ thông A đã hẹn nhau mỗi năm họp mặt một lần vào ngày hội trại của trường. Tuy nhiên qua 10 lần họp mặt thì nhận thấy mỗi lần họp mặt chỉ có đúng 20 thành viên tham dự và 2 lần họp mặt bất kỳ trong 10 lần họp mặt không có chung quá 2 thành viên. Hỏi khối 12 năm học đó của trường trung học phổ thông A có ít nhất bao nhiêu học sinh?

Lời giải.

Gọi N là số học sinh đã xuất hiện trong ít nhất một lần họp mặt.

Với mỗi học sinh s , gọi a_s là số lần họp mặt mà học sinh đó tham dự.

Tổng số lượt tham dự là $\sum_s a_s = 10 \cdot 20 = 200$.

Mỗi học sinh xuất hiện trong a_s lần tạo ra $C_{a_s}^2$ cặp lần họp mặt có chung học sinh ấy.

Vì mỗi cặp trong $C_{10}^2 = 45$ cặp lần họp mặt có chung không quá 2 người nên $\sum_s C_{a_s}^2 \leq 2C_{10}^2 = 90$.

Với mọi số nguyên $a_s \geq 1$, ta có $C_{a_s}^2 \geq a_s - 1$ nên $200 - N = \sum_s (a_s - 1) \leq \sum_s C_{a_s}^2 \leq 90$.

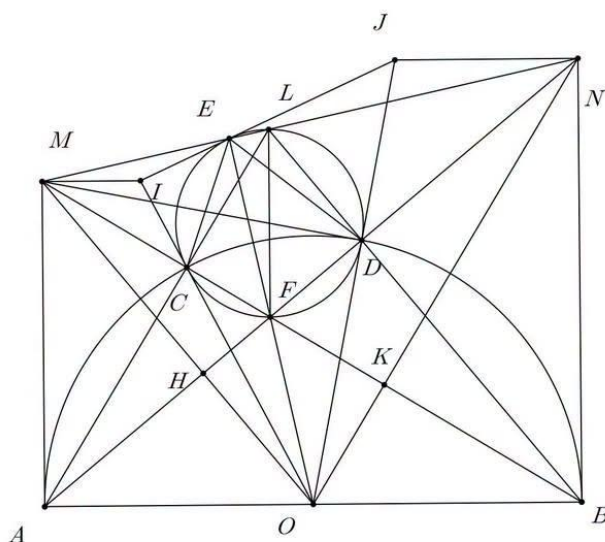
Do đó $N \geq 110$. Ta sẽ chỉ ra đây chính là giá trị nhỏ nhất của N .

Đánh số các lần họp mặt từ 1 đến 10, với mỗi cặp $\{i, j\}$, đúng 2 học sinh chỉ tham dự hai lần i và j để có $2C_{10}^2 = 90$ học sinh loại này, hơn nữa với mỗi lần i , thêm 2 học sinh chỉ tham dự lần i để có thêm 20 học sinh. Ở lần i , có $2 \cdot 9 = 18$ học sinh gắn với 9 cặp $\{i, j\}$ và 2 học sinh riêng, tổng cộng đúng 20 người. Hai lần bất kỳ có chung đúng hai học sinh. Vậy trường hợp 110 học sinh này thỏa mãn mọi yêu cầu.

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Cần Thơ TST - P6)

Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . C là điểm trên nửa đường tròn sao cho $CA < CB$. Tiếp tuyến Ax của (O) cắt BC tại M . Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại N . Gọi F là giao điểm của AN và BM , D là giao điểm thứ hai của AN và (O) . Đường thẳng d đi qua M , song song với AB , cắt OC tại I . Đường thẳng d' đi qua N , song song với AB , cắt OD tại J . Gọi E là giao điểm của MN và OF .

- ① Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của (O) và ba điểm I, J, E thẳng hàng.
- ② Chứng minh rằng C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.



Lời giải.

- ① Gọi $OM \perp AD$ tại H , $ON \perp BC$ tại K . Ta có tứ giác $MHKN$ nội tiếp
 $\Rightarrow OH \cdot OM = OK \cdot ON = OB^2 = OD^2 \Rightarrow \angle ODM = 90^\circ \Rightarrow MD$ là tiếp tuyến của (O) .
 $\frac{MI}{NJ} = \frac{MI}{OB} \cdot \frac{OA}{NJ} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{DA}{DN} = \frac{MA^2}{AB^2} \cdot \frac{AB^2}{NB^2} = \frac{MA^2}{NB^2}$; $\frac{EM}{EN} = \frac{ME \cdot MN}{NE \cdot NM} = \frac{MH \cdot MO}{NK \cdot NO} = \frac{MA^2}{NB^2}$
 Vì vậy $\frac{EM}{EN} = \frac{MI}{NJ}$, mà $JN \parallel MI \Rightarrow E, I, J$ thẳng hàng.
- ② Gọi AC cắt BD tại L . Áp dụng định lý Pascal cho bộ các điểm $\begin{pmatrix} A & D & B \\ B & C & D \end{pmatrix} \Rightarrow M, L, N$ thẳng hàng
 $\Rightarrow F$ là trực tâm $\triangle LAB$ có các đường cao AD, BC nên các điểm C, E, D, F cùng nằm trên đường tròn đường kính LF có tâm là trung điểm LF .