SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 04 bài)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027
Môn thi: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **180** phút
Ngày thi: **19/8/2026**

Bài 1 (*5 điểm*). Cho dãy số (x_n), với $x_1 = a > 1$ và $x_{n+1} = x_n - \ln x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

b) Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \ln \sqrt{x_k}, \forall n = 2,3,\ldots$ Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Bài 2 (*5 điểm*). Xét đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ với các hệ số nguyên, n là số nguyên dương thay đổi thỏa mãn $n \geq 4$, $a_n \neq 0$. Biết rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$.

Bài 3 (*5 điểm*). Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung không đi qua tâm. Điểm M thuộc đường tròn (O) sao cho tam giác MBC nhọn. Tiếp tuyến tại M và B của (O) cắt nhau ở D. Đường thẳng CD cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Lấy điểm F thuộc đoạn thẳng CE sao cho $\widehat{CMF} = \widehat{BCD}$. Gọi I là giao điểm thứ hai của MF và đường tròn (BCF), J là giao điểm thứ hai cùa BF và đường tròn (MCF).

a) Chứng minh I, J, O, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD. Chứng minh $IJ \perp CP$.

Bài 4 (*5 điểm*). Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\dfrac{10^n}{n^3 + n^2 + n + 1}$ là một số nguyên.

——————HẾT——————

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 03 bài)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027
Môn thi: **TOÁN**
Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 20/8/2026

Bài 5 *(6 điểm).* Với mỗi số nguyên dương n, đặt $\tau(n)$ là số các ước nguyên dương của n.

a) Chứng minh rằng $\tau(n) \le 2\sqrt{n}$, với mọi số nguyên dương n.

b) Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho dãy số $\tau(n), \tau(\tau(n)), \tau(\tau(\tau(n))), \ldots$, không chứa bất kì số chính phương nào.

Bài 6 *(7 điểm).* Cho tam giác ABC nhọn có H là chân đường cao kẻ từ A. Lấy điểm P sao cho hai đường phân giác trong của góc $\widehat{PBC}$ và $\widehat{PCB}$ cắt nhau tại điểm I thuộc đoạn thẳng AH. Gọi E là giao điểm của BI và AC, F là giao điểm của CI và AB, Q là giao điểm của EF và AH. Lấy lần lượt hai đường thẳng đối xứng với BC qua AB và AC, hai đường thẳng này cắt nhau tại K.

a) Chứng minh đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PBC và đường tròn nội tiếp tam giác KBC tiếp xúc với cạnh BC tại cùng một điểm.

b) Chứng minh P, Q, K thẳng hàng.

Bài 7 *(7 điểm).* Một khu vườn trồng cam có dạng bằng ô vuông kích thước 2025×2026 được chia thành các ô vuông đơn vị. Để chiếu sáng khu vườn về ban đêm, ta đặt các bóng điện ở các đỉnh của các ô vuông đơn vị, mỗi đỉnh đặt không quá một bóng điện. Biết rằng mỗi bóng điện chỉ có thể chiếu sáng toàn bộ các ô vuông đơn vị có chung đỉnh có đặt bóng điện đó.

a) Hỏi cần dùng ít nhất bao nhiêu bóng điện để có thể chiếu sáng toàn bộ khu vườn, trong trường hợp các bóng điện hoạt động bình thường?

b) Hỏi cần dùng ít nhất bao nhiêu bóng điện để có thể chiếu sáng toàn bộ khu vườn, kể cả trong trường hợp không may có một bóng điện bất kì bị cháy (mà ta không biết cụ thể là bóng nào)?

c) Trong quá trình trồng cam, chủ vườn quyết định mở rộng khu vườn thành bằng ô vuông có kích thước 2026×2026. Hỏi cần dùng ít nhất bao nhiêu bóng điện để điều kiện ở câu b) vẫn được thỏa mãn?

HẾT

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

Chương 1

CHỌN ĐTQG HÀ TĨNH 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Hà Tĩnh TST - P1)

Cho dãy số (x_n) với $x_1 = a > 1$ và $x_{n+1} = x_n - \ln x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Chứng minh dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.
2. Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \ln \sqrt{x_k}$ với $n = 2, 3, \ldots$. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Lời giải.

1. Với $x > 1$, ta có $0 < \ln x < x - 1$. Bởi vậy, nếu $x_n > 1$ thì $1 < x_{n+1} < x_n$.

   Theo quy nạp, (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1, nên tồn tại $L = \lim x_n \geq 1$.

   Cho $n \to \infty$ trong hệ thức truy hồi, ta được $L = L - \ln L$, do đó $L = 1$.

2. Từ hệ thức truy hồi, $\ln \sqrt{x_k} = \dfrac{1}{2}(x_k - x_{k+1})$. Vì thế

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(x_k - x_{k+1}) = \frac{1}{2} \left((n-1)a - \sum_{k=2}^{n} x_k \right).$$

   Do $x_k \to 1$, định lý trung bình Cesàro cho $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=2}^{n} x_k \to 1$. Suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{a-1}{2}$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Hà Tĩnh TST - P2)

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ với các hệ số nguyên, n là số nguyên dương chẵn thay đổi thỏa mãn $n > 4$, $a_n \neq 0$. Biết rằng $P(x)$ chia hết cho $x^2 - 2x - 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$.

Lời giải.

Đặt $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, là nghiệm dương của $x^2 - 2x - 1$.

Giả sử $|a_0|, \ldots, |a_{n-1}| \leq 1$. Từ $P(\alpha) = 0$ và $|a_n| \geq 1$, ta có $\alpha - 1 = \sqrt{2} > 1$ nên có mâu thuẫn là

$$\alpha^n \leq |a_n| \alpha^n = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} < \alpha^n$$

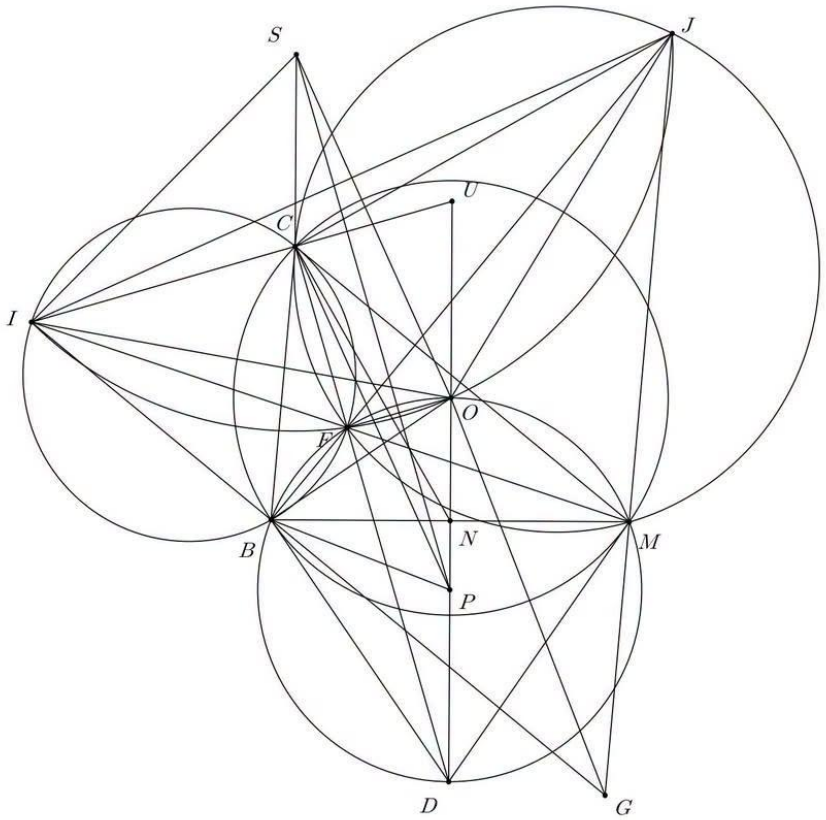
Mặt khác, với mọi $n > 4$, lấy $P(x) = x^{n-2}(x^2 - 2x - 1) = x^n - 2x^{n-1} - x^{n-2}$.

Vì vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm bằng 2.

Bài toán 0.3. **(Lim Olympic - Hà Tĩnh TST - P3)**

Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung không đi qua tâm. Điểm M thuộc đường tròn (O) sao cho tam giác MBC nhọn. Tiếp tuyến tại M và B của (O) cắt nhau ở D. Đường thẳng CD cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Lấy điểm F thuộc đoạn thẳng CE sao cho $\angle CMF = \angle BCD$. Gọi I là giao điểm thứ hai của MF với đường tròn (BCF), J là giao điểm thứ hai của BF với đường tròn (MCF).

1. Chứng minh I, J, O, F cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD. Chứng minh $IJ \perp CP$.



Lời giải.

1. Ta dễ thấy F là điểm *Dumpty* của ΔBCM nên ta có thêm các tính chất là CB tiếp xúc (CJM); CM tiếp xúc (CBI) và các điểm O, F, B, D, M cùng nằm trên (OD).

   Ta có $\angle BIF = \angle BCF = \angle CMF \Rightarrow BI // CM$, tương tự ta có $MJ // CB$. Gọi BI cắt JM tại G ta có $BCMG$ là hình bình hành $\Rightarrow \angle BGM = \angle BCM = \angle GIB \Rightarrow CMGI$ là hình thang cân mà $OM = OC \Rightarrow OG = OI$, tương tự ta cũng có $OG = OJ \Rightarrow OJ = OI$ mà FO là phân giác ngoài $\angle IFJ$ nên tứ giác $IFOJ$ nội tiếp.

2. Kẻ hình bình hành $SCDP$, gọi CI cắt OP tại U. Ta chứng minh P là tâm $(OFIJ)$.

Do $CS//OP$, ta có $\angle SCI = 180^\circ - \angle IUP = 180^\circ - (360^\circ - \angle UIB - \angle PBI - \angle BPO) = \angle CIB + \angle PBC + \angle CBI + 180^\circ - 2\angle BOP - 180^\circ = \angle PBC + 2\angle CIB - 2\angle BCM = \angle PBC$.

Nên $\angle SCI = \angle PBC$, mà $PB = PD = SC, CI = CB$ nên $\Delta SCI = \Delta PBC$ (c.g.c)

$\Rightarrow SI = PC = SO$ (do $OSCP$ là hình bình hành). Lại có $SP//CF$, $CF \perp OF$, $PO = PF$ nên SP là trung trực $FO \Rightarrow SO = SF \Rightarrow SO = SF = SI \Rightarrow S$ là tâm $(OFIJ)$

$\Rightarrow SI = SJ$, $OI = OJ \Rightarrow OS \perp IJ$, $CP//OS \Rightarrow CP \perp IJ$.

Bài toán 0.4. **(Lim Olympic - Hà Tĩnh TST - P4)**

Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho

$$\frac{10^n}{n^3+n^2+n+1}$$

là một số nguyên.

Lời giải.

Ta có $n^3+n^2+n+1 = (n+1)(n^2+1)$ nên mọi ước nguyên tố của $n+1$ và n^2+1 đều thuộc $\{2,5\}$.
Nếu n chẵn thì $n+1$ và n^2+1 đều lẻ, nên chúng đều là lũy thừa của 5.
Vì $n > 0$, ta có $5 \mid n+1$, suy ra $n^2+1 \equiv 2 \pmod 5$, mâu thuẫn.
Xét n lẻ. Vì $n^2+1 \equiv 2 \pmod 4$, tồn tại $b \geq 0$ sao cho $n^2+1 = 2 \cdot 5^b$.
Viết $n+1 = 2^a 5^c$. Nếu $c > 0$ thì $n^2+1 \equiv 2 \pmod 5$, nên suy ra $b = 0$, kéo theo $n = 1$, trái với $c > 0$.
Vậy $c = 0$ và $n = 2^a - 1$. Thay vào ta được

$$5^b = 2^{2a-1} - 2^a + 1$$

Với $a \geq 4$, ta có $5^b \equiv 1 \pmod{2^a}$. Theo bổ đề LTE thì $v_2(5^b-1) = 2 + v_2(b)$ nên $2^{a-2} \mid b$.
Mặt khác $5^b < 2^{2a-1}$, do đó $b < (2a-1)\log_5 2 < a \leq 2^{a-2}$, mâu thuẫn. Vì thế $a \leq 3$.
Thử $a = 1, 2, 3$, ta được $n = 1, 3, 7$. Kiểm tra để thấy được $n = 1$ không thoả mãn.
Vậy $n \in \{3, 7\}$ là tất cả nghiệm của bài toán.

Chương 2

CHỌN ĐTQG HÀ TĨNH 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Hà Tĩnh TST - P5)

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $\tau(n)$ là số các ước nguyên dương của n.

1. Chứng minh $\tau(n) < 2\sqrt{n}$ với mọi số nguyên dương n.
2. Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho dãy $\tau(n),\ \tau(\tau(n)),\ \tau(\tau(\tau(n))),\ \ldots$ không chứa bất kì số chính phương nào.

Lời giải.

1. Nếu n không là số chính phương thì các ước của n ghép thành các cặp $d, \dfrac{n}{d}$ nằm ở hai phía của $\sqrt{n}$. Vì thế $\tau(n) \le 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor < 2\sqrt{n}$.

   Còn nếu n là số chính phương thì $\sqrt{n}$ là ước không được ghép cặp, nên $\tau(n) \le 2\sqrt{n} - 1 < 2\sqrt{n}$.

2. Ta sẽ chứng minh một số nguyên dương m có dãy $m, \tau(m), \tau(\tau(m)), \ldots$ không chứa số chính phương khi và chỉ khi m là số nguyên tố.

   Nếu m là số nguyên tố thì $\tau(m) = 2$ và $\tau(2) = 2$ nên thoả mãn.

   Giả sử m là hợp số và dãy trên không chứa số chính phương. Khi đó m không chính phương, nên $\tau(m)$ là số chẵn và $\tau(m) \ge 4$. Nếu $\tau(m)$ không chính phương thì nó lại là một hợp số. Hơn nữa, với mọi hợp số $m \ge 4$, câu 1 cho ta $\tau(m) < 2\sqrt{m} \le m$. Bởi vậy, nếu dãy không có số chính phương nào thì ta thu được một dãy giảm nghiêm ngặt gồm các hợp số, điều không thể xảy ra. Suy ra m phải là số nguyên tố.

   Áp dụng kết luận này cho $m = \tau(n)$, điều kiện bài toán tương đương với $\tau(n)$ là số nguyên tố.

   Viết $n = q_1^{\alpha_1} \cdots q_t^{\alpha_t}$, ta có $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_t + 1)$.

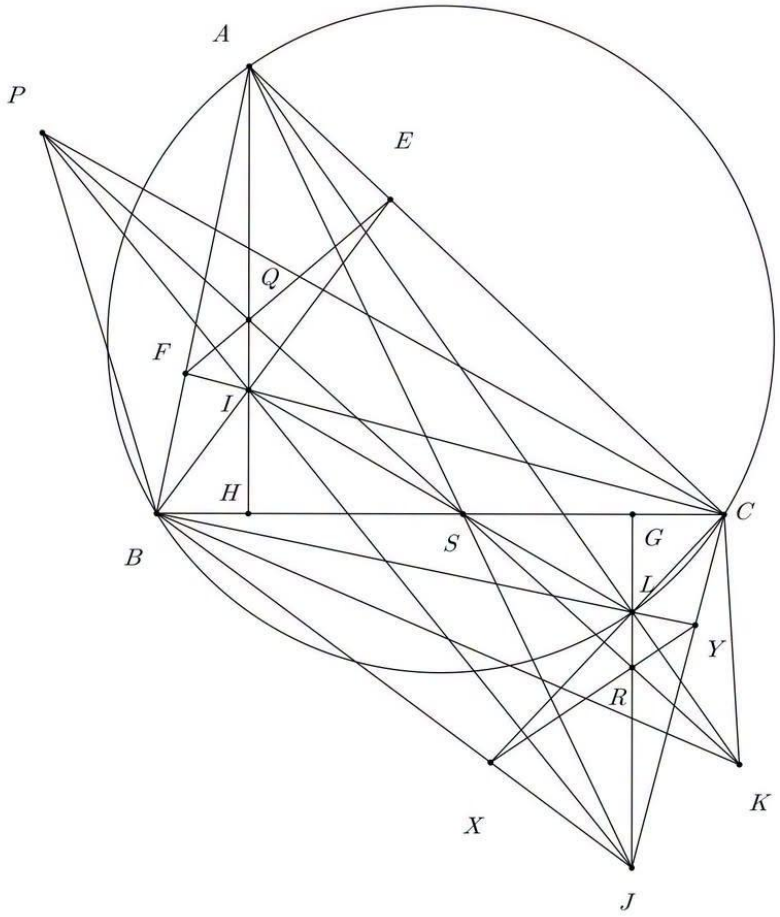
   Tích này là số nguyên tố khi và chỉ khi $t = 1$ và $\alpha_1 + 1$ là số nguyên tố.

   Vậy tất cả các số cần tìm là $n = q^{p-1}$ trong đó p, q là các số nguyên tố.

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Hà Tĩnh TST - P6)

Cho tam giác ABC nhọn có H là chân đường cao kẻ từ A. Lấy điểm P sao cho hai đường phân giác trong của các góc PBC và PCB cắt nhau tại điểm I thuộc đoạn thẳng AH. Gọi E là giao điểm của BI và AC, F là giao điểm của CI và AB, Q là giao điểm của EF và AH. Lấy lần lượt hai đường thẳng đối xứng với BC qua AB và AC; hai đường thẳng này cắt nhau tại K.

1. Chứng minh đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PBC và đường tròn nội tiếp tam giác KBC tiếp xúc với cạnh BC tại cùng một điểm.
2. Chứng minh P, Q, K thẳng hàng.



Lời giải.

1. Kẻ đường kính AL và G là hình chiếu của A trên BC.

   Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của ΔPBC.

   Ta thấy $\angle LBA = \angle LCA = 90^\circ$ mà KB, KC đối xứng với BC qua AB, AC nên BL là phân giác $\angle CBK$ và CL là phân giác $\angle BCK$ nên L là tâm đường tròn nội tiếp ΔKBC.

   Dễ thấy G, H đối xứng qua trung điểm BC, mà H là tiếp điểm tâm nội I của ΔPBC nên theo tính chất quen ta có G là tiếp điểm tâm bàng J hay J, L, G thẳng hàng.

2. Gọi PJ, AK cắt BC lần lượt tại N, R. Theo hàng điểm phân giác và hàng điểm tứ giác toàn phần ta có $(ALRK) = (AIHQ) = -1 \Rightarrow IL, RH, KQ$ đồng quy tại S.

   Gọi CL cắt BJ tại X, BL cắt CJ tại Y, XY cắt GJ tại R. Ta có $(GRLJ) = (HQIA) = -1$ và $AH // GJ$ nên AJ, LI, HG, QR đồng quy tại S.

   Lại có $(PNIJ) = -1 \Rightarrow S(PINJ) = S(PIHA) = -1 = S(QIHA) \Rightarrow S, P, Q$ thẳng hàng hay P, Q, K thẳng hàng.

Bài toán 0.7. **(Lim Olympic - Hà Tĩnh TST - P7)**

Một khu vườn trồng cam có dạng bảng ô vuông kích thước 2025×2026, được chia thành các ô vuông đơn vị. Để chiếu sáng khu vườn về ban đêm, ta đặt các bóng điện ở các đỉnh của các ô vuông đơn vị, mỗi đỉnh đặt không quá một bóng điện. Mỗi bóng điện chỉ có thể chiếu sáng toàn bộ các ô vuông đơn vị có chung đỉnh với đỉnh đặt bóng điện đó.

1. Hỏi cần dùng ít nhất bao nhiêu bóng điện để chiếu sáng toàn bộ khu vườn khi các bóng điện hoạt động bình thường?
2. Hỏi cần dùng ít nhất bao nhiêu bóng điện để toàn bộ khu vườn vẫn được chiếu sáng nếu có một bóng điện bất kì bị cháy?
3. Chủ vườn mở rộng khu vườn thành bảng 2026×2026. Hỏi cần dùng ít nhất bao nhiêu bóng điện để điều kiện ở câu 2 vẫn được thỏa mãn?

Lời giải.

Đầu tiên ta có bổ đề sau:

Bổ đề 0.1.

Trong một bảng $r \times s$ gồm các số $0, 1$, giả sử mọi bảng con 2×2 gồm hai hàng liên tiếp và hai cột liên tiếp đều có tổng ít nhất bằng 2. Khi đó số các số 1 trong bảng không nhỏ hơn

$$\min\left\{s\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor, r\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor\right\}.$$

Chứng minh. Trước hết, xét một bảng $2 \times s$. Với $1 \le j \le s$, gọi c_j là tổng các phần tử của cột thứ j. Theo giả thiết, ta có $c_j + c_{j+1} \ge 2$ với mọi $1 \le j \le s-1$.

Ghép các cột thành các cặp liên tiếp $(1,2), (3,4), \ldots$ ta được $\sum_{j=1}^{s} c_j \ge 2\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor$.

Do đó một bảng $2 \times s$ như trên có ít nhất $2\lfloor s/2 \rfloor$ số 1.

Trong trường hợp s lẻ, giả sử $s = 2k+1$ và bảng có đúng $2k$ số 1. Khi đó

$$(c_1 + c_2) + (c_3 + c_4) + \cdots + (c_{2k-1} + c_{2k}) + c_{2k+1} = 2k.$$

Mỗi tổng trong k dấu ngoặc đều không nhỏ hơn 2, nên bắt buộc

$$c_{2k+1} = 0, \qquad c_{2i-1} + c_{2i} = 2$$

với mọi $1 \le i \le k$. Từ $c_{2k} + c_{2k+1} \ge 2$ và $c_{2k+1} = 0$, suy ra $c_{2k} = 2$, do đó $c_{2k-1} = 0$. Do đó

$$(c_1, c_2, \ldots, c_{2k+1}) = (0, 2, 0, 2, \ldots, 0, 2, 0).$$

Vì mỗi cột chẵn chứa hai số 1, còn mỗi cột lẻ chỉ chứa các số 0, nên mỗi hàng của bảng có đúng k số 1.

Bây giờ trở lại bảng $r \times s$ ban đầu. Nếu r chẵn, ta ghép các hàng thành các cặp liên tiếp. Mỗi cặp hàng tạo thành một bảng $2 \times s$, nên chứa ít nhất $2\lfloor s/2 \rfloor$ số 1. Vì có $r/2$ cặp hàng, toàn bảng có ít nhất

$$\frac{r}{2} \cdot 2\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor = r\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor$$

số 1. Tương tự, nếu s chẵn thì ghép các cột thành từng cặp liên tiếp, ta được ít nhất $s\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor$ số 1.

Như vậy, bổ đề đúng nếu r hoặc s chẵn.

Ta chỉ còn xét trường hợp $r = 2h+1,\ s = 2k+1$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $h \le k$. Khi đó $\min\{(2k+1)h, (2h+1)k\} = (2k+1)h$.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo h rằng bảng có ít nhất $h(2k+1)$ số 1.

Với $h = 0$, khẳng định hiển nhiên. Giả sử $h \geq 1$ và khẳng định đã đúng với $h - 1$.

Gọi t là số các số 1 trên hàng đầu tiên.

- Nếu $t \geq h$, ta bỏ hàng đầu tiên. Phần còn lại là một bảng $2h \times (2k+1)$. Theo trường hợp số hàng chẵn đã chứng minh, bảng này có ít nhất $2h \left\lfloor \dfrac{2k+1}{2} \right\rfloor = 2hk$ số 1.

  Vì thế bảng ban đầu có ít nhất $2hk + h = h(2k+1)$ số 1.

- Nếu $t \leq h - 1$, xét bảng $2 \times (2k+1)$ tạo bởi hai hàng đầu tiên.

  Theo kết quả ở đầu chứng minh, hai hàng này có ít nhất $2k$ số 1.

  Nếu chúng có đúng $2k$ số 1, thì theo trường hợp dấu bằng đã xét, mỗi hàng phải có đúng k số 1. Đặc biệt, hàng đầu tiên có đúng k số 1, mâu thuẫn với $t \leq h - 1 < k$ do $h \leq k$. Vì vậy, hai hàng đầu tiên phải chứa ít nhất $2k + 1$ số 1.

  Bỏ hai hàng đầu tiên, ta còn lại một bảng

  $$(2h-1) \times (2k+1) = \big(2(h-1)+1\big) \times (2k+1).$$

  Vì $h - 1 \leq k$, theo giả thiết quy nạp, bảng còn lại có ít nhất $(h-1)(2k+1)$ số 1. Do đó toàn bảng có ít nhất $(2k+1) + (h-1)(2k+1) = h(2k+1)$ số 1.

Cuối cùng, ta chứng minh cận dưới này đạt được. Nếu điền số 1 vào toàn bộ các vị trí thuộc các hàng có chỉ số chẵn và điền số 0 vào các vị trí còn lại, thì mỗi cặp hàng liên tiếp chứa đúng một hàng toàn số 1. Vì vậy, mỗi bảng con 2×2 gồm hai hàng liên tiếp và hai cột liên tiếp có đúng hai số 1. Tổng số các số 1 trong cách điền này là $s \left\lfloor \dfrac{r}{2} \right\rfloor$.

Tương tự, nếu điền số 1 vào toàn bộ các cột có chỉ số chẵn và điền số 0 vào các vị trí còn lại, ta thu được một bảng thỏa mãn giả thiết và có $r \left\lfloor \dfrac{s}{2} \right\rfloor$ số 1. Chọn cách điền tương ứng với số nhỏ hơn trong hai số trên, ta thấy cận dưới đạt được. Vậy số các số 1 ít nhất là

$$\min\left\{ s \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor, r \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \right\}.$$

□

Trở lại bài toán ban đầu:

Một khu vườn gồm $m \times n$ ô vuông đơn vị có $(m+1) \times (n+1)$ đỉnh. Ta xem các đỉnh này như một bảng gồm các số $0, 1$, số 1 biểu thị đỉnh có đặt bóng điện, còn số 0 biểu thị đỉnh không đặt bóng điện. Khi đó bốn đỉnh của mỗi ô vuông đơn vị tạo thành một bảng con 2×2 gồm hai hàng liên tiếp, hai cột liên tiếp.

(1) Khu vườn có 2025×2026 ô vuông đơn vị.

Xét các ô vuông nằm trên các hàng $1, 3, 5, \ldots, 2025$ và các cột $1, 3, 5, \ldots, 2025$, có tất cả

$$1013 \cdot 1013 = 1013^2$$

ô vuông như vậy. Hai ô bất kỳ trong số này không có đỉnh chung. Vì mỗi ô phải có ít nhất một đỉnh được đặt bóng điện, nên các bóng điện chiếu sáng các ô trên phải đôi một khác nhau.

Do đó cần ít nhất 1013^2 bóng điện.

Ta chứng minh cận dưới này đạt được. Đánh số các hàng đỉnh từ 1 đến 2026 và các cột đỉnh từ 1 đến 2027. Đặt bóng tại tất cả các đỉnh là giao điểm của một hàng đỉnh chẵn và một cột đỉnh chẵn.

Trong hai hàng đỉnh liên tiếp có đúng một hàng chẵn, và trong hai cột đỉnh liên tiếp có đúng một cột chẵn nên mỗi ô vuông đơn vị có đúng một đỉnh được đặt bóng điện, nên toàn bộ khu vườn được chiếu sáng. Số hàng đỉnh chẵn và số cột đỉnh chẵn bằng 1013, nên số bóng điện được dùng là 1013^2.

Vậy số bóng điện ít nhất cần dùng là 1013^2.

2 Để khu vườn vẫn được chiếu sáng khi một bóng điện bất kỳ bị cháy, mỗi ô vuông đơn vị phải có ít nhất hai đỉnh được đặt bóng điện. Thật vậy, nếu một ô chỉ có đúng một bóng điện thì khi bóng điện đó bị cháy, ô ấy sẽ không còn được chiếu sáng. Ngược lại, nếu mỗi ô có ít nhất hai bóng điện thì sau khi một bóng bất kỳ bị cháy, mỗi ô vẫn còn ít nhất một bóng hoạt động.

Bảng các đỉnh của khu vườn có kích thước 2026×2027.

Điều kiện trên tương đương với việc mọi bảng con 2×2 gồm hai hàng liên tiếp và hai cột liên tiếp đều có tổng ít nhất bằng 2.

Áp dụng bổ đề với $r = 2026$ và $s = 2027$, số bóng điện không nhỏ hơn

$$\min\left\{2027\left\lfloor\frac{2026}{2}\right\rfloor, 2026\left\lfloor\frac{2027}{2}\right\rfloor\right\} = 2026 \cdot 1013 = 2 \cdot 1013^2$$

Theo trường hợp dấu bằng trong bổ đề, cận này đạt được bằng cách đặt bóng điện tại toàn bộ các đỉnh thuộc các cột đỉnh có chỉ số chẵn.

Vậy số bóng điện ít nhất cần dùng là $2 \cdot 1013^2$.

3 Khi mở rộng khu vườn thành bảng 2026×2026, bảng các đỉnh có kích thước 2027×2027.

Tương tự câu trên và áp dụng bổ đề với $r = s = 2027$, số bóng điện không nhỏ hơn

$$\min\left\{2027\left\lfloor\frac{2027}{2}\right\rfloor, 2027\left\lfloor\frac{2027}{2}\right\rfloor\right\} = 2027 \cdot 1013.$$

Theo trường hợp dấu bằng trong bổ đề, cận này đạt được bằng cách đặt bóng điện tại toàn bộ các đỉnh thuộc các hàng đỉnh có chỉ số chẵn hoặc toàn bộ các đỉnh thuộc các cột đỉnh có chỉ số chẵn.

Vậy số bóng điện ít nhất cần dùng là $2027 \cdot 1013$.