SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HƯNG YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2026-2027

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Họ, tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Câu 1. (5,0 điểm) Xét đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn $P(1)=\sqrt{2}, P(-1)=-\sqrt{2}$ và

$$\left(P(x)\right)^2 \le x^6+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có nghiệm thực và có bậc nhỏ hơn 4.

b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 2. (4,0 điểm) Cho dãy số nguyên (u_n) được xác định bởi $u_1=3, u_2=7$ và

$$u_{n+2}=3u_{n+1}-u_n,\ \forall n\ge 1.$$

Cho N là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $u_N \equiv 3 \pmod N$. Đặt $M=\dfrac{u_N}{3}$.

a) Chứng minh rằng u_N chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng $M \equiv 1 \pmod{4N}$ và M là một hợp số.

Câu 3. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy điểm X cố định nằm trên cung BC không chứa A của (O). Một đường thẳng d chuyển động qua X. Các đường thẳng d_A, d_B, d_C lần lượt đối xứng với d qua BC, CA, AB. Gọi A' là giao điểm của d_B và d_C, B' là giao điểm của d_A và d_C, C' là giao điểm của d_A và d_B.

a) Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm nằm trên (O).

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A'B'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4. (2,0 điểm) Cho số nguyên dương $n\ge 3$ và một số nguyên tố lẻ p. Với mỗi S là tập hợp gồm n số nguyên dương phân biệt, ta ký hiệu $l_p(S)$ là số các lũy thừa cơ số p có thể biểu diễn dưới dạng tổng của ba phần tử đôi một khác nhau thuộc S. Hãy xác định giá trị lớn nhất có thể có của $l_p(S)$ theo n, p.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho số nguyên dương n. Hai bạn A và B cùng tham gia một trò chơi gồm n lượt. Mỗi lượt, họ độc lập giải cùng một câu đố và kết quả là mỗi người chơi hoặc giải được hoặc không giải được. Đặt $c_A(i), c_B(i)$ lần lượt là tổng số câu đố mà A, B giải được trong i lượt đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu kịch bản có thể xảy để A đạt giải đặc biệt, nghĩa là sau khi kết thúc toàn bộ n lượt chơi, A không chỉ giải được nhiều câu đố hơn B $\left(c_A(n)>c_B(n)\right)$, mà còn chưa bao giờ để B bỏ xa quá một câu trong suốt quá trình $\left(\forall i=1,2,\ldots,n: c_B(n)-c_A(n)\le 1\right)$?

----- HẾT -----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu; Giám thị không giải thích gì thêm)

Chương 1

CHỌN ĐTQG HƯNG YÊN 2026

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Hưng Yên TST - P1)

Xét đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn $P(1)=\sqrt{2}, P(-1)=-\sqrt{2}$ và

$$(P(x))^2 \le x^6+1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có nghiệm thực và có bậc nhỏ hơn 4.
2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

Lời giải.

1. Để ý $P(1)P(-1)<0$ nên $P(x)$ có nghiệm thực thuộc $(-1,1)$.

   Xét $Q(x)=(x^6+1)-P(x)^2$ với $x\in\mathbb{R}$.

   Giả sử $\deg P \ge 4$ thì $\deg Q \ge 8$, hệ số bậc cao nhất của Q là âm nên $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x)=-\infty$ nên tồn tại M sao cho $Q(M)<0$, khi đó $(P(M))^2>(M^6+1)$, vô lý.

   Vậy $\deg P<4$, điều phải chứng minh.

2. Viết $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a,b,c,d thực.

   Từ $P(1)=\sqrt{2}$ và $P(-1)=-\sqrt{2}$ nên $a+b+c+d=\sqrt{2}$ và $-a+b-c+d=-\sqrt{2}$.

   Suy ra $b+d=0$ và $a+c=\sqrt{2}$ nên $P(x)=ax^3+bx^2+(\sqrt{2}-a)x-b$.

   Ta có $Q(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $Q(1)=Q(-1)=0$.

   Viết $Q(x)=(x-1)^tR(x)$, $R(1)\ne 0$, t nguyên dương. Giả sử t là số lẻ.

   Vì $R(1)\ne 0$ nên tồn tại δ sao cho $R(x)$ cùng dấu với $R(1)$ với mọi $x\in(1-\delta,1+\delta)$.

   Lấy $0<h<\delta$ thì $Q(1+h)=h^tR(1+h)$, và $Q(1-h)=-h^tR(1-h)$, do đó $Q(1+h)$ và $Q(1-h)$ trá dấu với nhau, nên có 1 số là âm, vô lý do $Q(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

   Vì vậy t chẵn, suy ra $Q(1)=Q'(1)=0$, tương tự $Q(-1)=Q'(-1)=0$.

   Ta có $Q'(x)=6x^5-2P(x)P'(x)$ nên $0=Q'(1)=6-2P(1)P'(1)=6-2\sqrt{2}P'(1)$.

   Vì thế $P'(1)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, tương tự $P'(-1)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

   Từ $P(x)=ax^3+bx^2+(\sqrt{2}-a)x-b$ suy ra $P'(x)=3ax^2+2bx+(\sqrt{2}-a)$.

   Khi đó $3a+2b+\sqrt{2}-a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ và $3a-2b+\sqrt{2}-a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ nên $b=0$, $a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

   Vì vậy $P(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^3+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

   Thử lại để có được $x^6+1-P(x)^2=\dfrac{1}{8}(x^2-1)^2(7x^2+8)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên đây là đa thức duy nhất thoả mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét.

Ngoài ra có thể sử dụng bổ đề sau để giải quyết bài toán:

Bổ đề Fermat: Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Hưng Yên TST - P2)

Cho dãy số nguyên (u_n) được xác định bởi $u_1 = 3, u_2 = 7$ và

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n, \forall n \geq 1.$$

Cho N là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $u_N \equiv 3 \pmod N$. Đặt $M = \dfrac{u_N}{3}$.

1. Chứng minh rằng u_N chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.
2. Chứng minh rằng $M \equiv 1 \pmod{4N}$ và M là một hợp số.

Lời giải.

1. Để ý vì $u_{n+2} \equiv -u_n \pmod 3$ và $3 \mid u_1$ nên $3 \mid u_n$ với mọi n lẻ.

   Xét dãy (v_n) xác định bởi $v_n = \dfrac{u_{2n+1}}{3}$ với mọi số tự nhiên n.

   Khi đó $u_{n+4} = 3u_{n+3} - u_{n+2} = 3(3u_{n+2} - u_{n+1}) - u_{n+2} = 8u_{n+2} - (u_{n+2} + u_n) = 7u_{n+2} - u_n$.

   Suy ra $v_0 = 1$, $v_1 = 6$ và $v_{n+2} = 7v_{n+1} - v_n$ với mọi số tự nhiên n.

   Để ý v_n chia hết cho 3 khi và chỉ khi $n \equiv 1, 4 \pmod 6$, hay $n \equiv 1 \pmod 3$.

   Viết $N = 2k + 1$ với k nguyên dương thì $2k + 1 \not\equiv 0 \pmod 3$ nên $k \not\equiv 1 \pmod 3$ nên $3 \nmid v_k$.

   Từ đó $u_N = u_{2k+1} = 3v_k$ không chia hết cho 9, điều phải chứng minh.

2. Ta cần chứng minh $v_k \equiv 1 \pmod{4N}$ và v_k là hợp số.

   Vì $u_N \equiv 3 \pmod N$ nên $3v_k \equiv 3 \pmod N$ nên $v_k \equiv 1 \pmod N$ do $\gcd(N, 3) = 1$.

   Ta có $v_n \equiv 1 \pmod 4 \iff n \equiv 0, 2 \pmod 3$.

   Vì $k \not\equiv 1 \pmod 3$ nên $v_k \equiv 1 \pmod 4$, kết hợp $\gcd(N, 4) = 1$ để có $v_k \equiv 1 \pmod{4N}$.

   Đặt $\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ và $\beta = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ thì $u_n = \alpha^n + \beta^n$ với mọi n nguyên dương.

   Ta có $N = ab$ với $a, b > 1$ là các số lẻ thì dễ dàng thấy được u_N chia hết cho u_a.

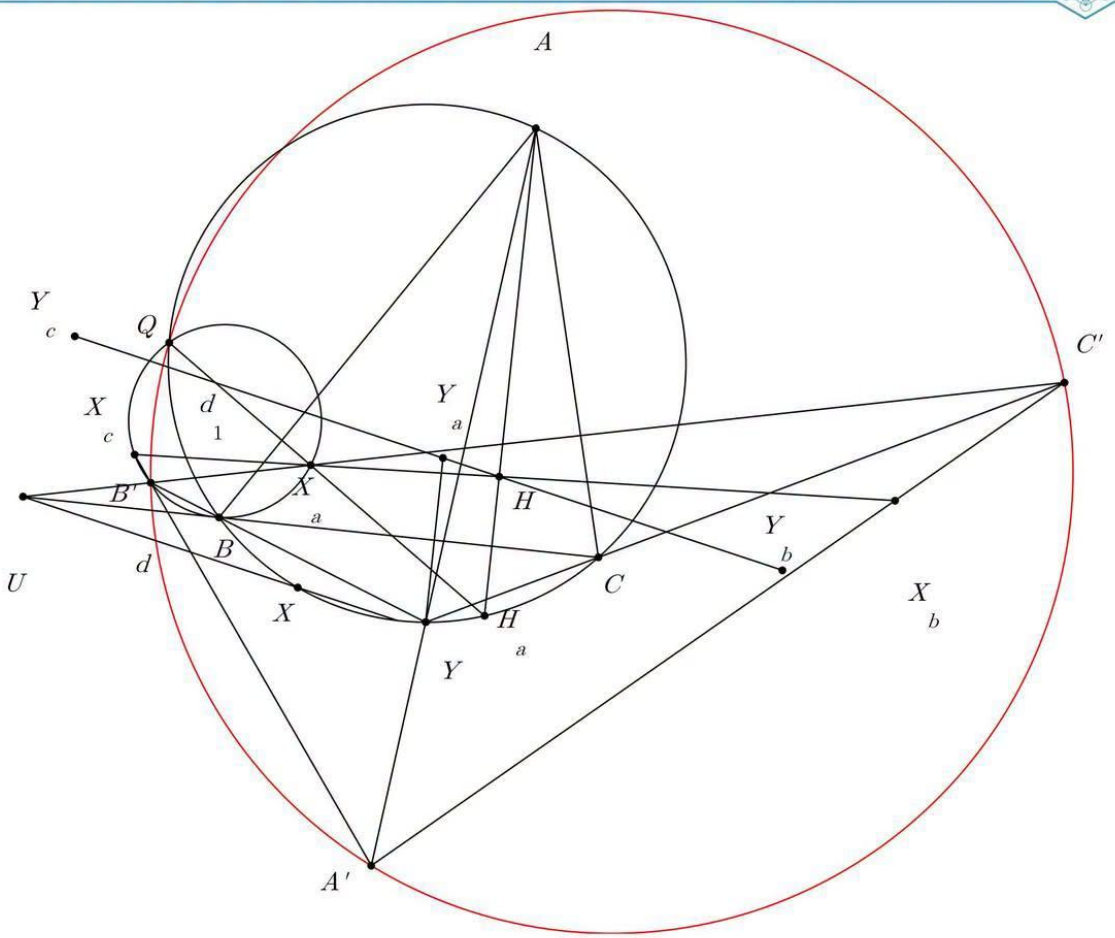
   Vì thế $M = \dfrac{u_N}{3} = \dfrac{u_N}{u_b} \cdot \dfrac{u_b}{3}$ là hợp số do $\dfrac{u_b}{3}$ là số nguyên lớn hơn 1 và $u_N > u_b$.

   Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Hưng Yên TST - P3)

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy điểm X cố định nằm trên cung BC không chứa A của (O). Một đường thẳng d chuyển động qua X. Các đường thẳng d_A, d_B, d_C lần lượt đối xứng với d qua BC, CA, AB. Gọi A' là giao điểm của d_B và d_C, B' là giao điểm của d_A và d_C, C' là giao điểm của d_A và d_B.

1. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm nằm trên (O).
2. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A'B'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải.

1. Gọi $B'C'$ cắt BC tại U. Ta có: $B'C'$ là d_a do đó: d đi qua U.

   Tương tự thì: $C'A'$, AB, d đồng quy. Và: AC, $A'B'$, d đồng quy.

   Do đó áp dụng định lí *Desargues* ta có: AA', BB', CC' đồng quy tại Y. Gọi Y_a, Y_b, Y_c đối xứng Y qua BC, CA, AB lần lượt. Theo tính chất đối xứng ta có: Y_bY_c song song d. Tương tự thì ta thu được: Y_a, Y_b, Y_c thẳng hàng (cùng nằm trên đường thẳng song song d) dẫn đến theo tính chất đường thẳng *Steiner* đảo thì: $Y \in (O)$.

2. Gọi H là trực tâm tam giác ABC.

   Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng đối xứng với XH qua BC, CA, AB.

   Gọi H_a là điểm đối xứng của H qua BC. Ta có $H_a \in (O)$. Gọi Q là giao điểm thứ hai của d_1 với (O). Gọi Q_a, Q_b, Q_c lần lượt là các điểm đối xứng của Q qua BC, CA, AB. Vì $Q \in d_1$ nên $Q_a \in XH$.

   Theo tính chất điểm *Anti-Steiner* ta có: d_1, d_2, d_3 đồng quy tại điểm cố định $Q \in (O)$.

   Gọi X_a, X_b, X_c lần lượt là các điểm đối xứng của X qua BC, CA, AB.

   Vì $X \in (O)$ nên theo tính chất *Steiner*: X_a, X_b, X_c, H thẳng hàng.

   Ta có: $d_1 = QX_a$, $d_2 = QX_b$, $d_3 = QX_c$.

   Do (d_2, d_b) và (d_3, d_c) lần lượt là ảnh của (XH, d) qua các phép đối xứng nên: $\angle(d_2, d_b) = \angle(d_3, d_c)$.

   Mà $A' = d_b \cap d_c$, suy ra: $\angle QX_bA' = \angle QX_cA'$.

   Do đó: Q, X_b, A', X_c đồng viên. Tương tự: Q, X_c, B', X_a đồng viên, Q, X_a, C', X_b đồng viên.

Vậy ta thu được: Q là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần: $(A'B', B'C', C'A', X_bX_c)$ dẫn đến: $Q \in (A'B'C')$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ luôn đi qua điểm cố định Q.

Bài toán 0.4. **(Lim Olympic - Hưng Yên TST - P4)**

Cho số nguyên dương $n \geq 3$ và một số nguyên tố lẻ p. Với mỗi S là tập hợp gồm n số nguyên dương phân biệt, ta ký hiệu $l_p(S)$ là số các lũy thừa cơ số p có thể biểu diễn dưới dạng tổng của ba phần tử đôi một khác nhau thuộc S. Hãy xác định giá trị lớn nhất có thể của $l_p(S)$ theo n, p.

Lời giải.

Giả sử các luỹ thừa cơ số p biểu diễn được là $p^{a_1} < p^{a_2} < \cdots < p^{a_t}$, ta cần tìm giá trị lớn nhất của t.

Gọi A_i là tập gồm 3 phần tử sao cho tổng các phần tử trong A_i bằng p^{a_i}, với $i = 1, 2, \ldots t$.

Ta có $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t| \leq n$.

Nhận xét. Với mỗi $i \geq 2$, ta có $A_i \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{i-1}) \neq \emptyset$.

Giả sử phản chứng, tức $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{i-1}) \subset A_i$.

Khi đó cứ với $x \in A_i$ thì tồn tại $j < i$ sao cho $x \in A_j$ thì $x < \sum_{a \in A_j} a = p^j \leq p^{i-1}$.

Từ đó tổng các phần tử của A_i bé hơn $3p^{i-1} < p^i$, vô lý. Nhận xét được chứng minh.

Từ nhận xét trên ta có $|A_1| = 3$, $|A_2 \setminus A_1| \geq 1$, $|A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)| \geq 1$,...

Do đó $n \geq |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t| \geq 3 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 3 + (t-1) = t + 2$.

Vì vậy $t \leq n - 2$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn với tập

$$S = \{1, 2, p^2 - 3, p^3 - 3, \ldots p^{n-2} - 3\}$$

Vậy giá trị lớn nhất của $l_p(S)$ bằng $n - 2$.

Bài toán 0.5. **(Lim Olympic - Hưng Yên TST - P5)**

Cho số nguyên dương n. Hai bạn A và B cùng tham gia một trò chơi gồm n lượt. Mỗi lượt, họ độc lập giải cùng một câu đố và kết quả là mỗi người chơi hoặc giải được hoặc không giải được. Đặt $c_A(i), c_B(i)$ lần lượt là tổng số câu đố mà A, B giải được trong i lượt đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu kịch bản có thể xảy để A đạt giải đặc biệt, nghĩa là sau khi kết thúc toàn bộ n lượt chơi, A không chỉ giải được nhiều câu đố hơn B $(c_A(n) > c_B(n))$, mà còn chưa bao giờ để B bỏ xa quá một câu trong suốt quá trình $(\forall i = 1, 2, \ldots, n : c_B(i) - c_A(i) \leq 1)$?

Lời giải.

Với mỗi $i = 0, 1, \ldots, n$, đặt $d_i = c_A(i) - c_B(i)$. Ta xem $(d_i)_{i=0}^n$ như một quỹ đạo xuất phát từ $d_0 = 0$.

Ở mỗi lượt, quỹ đạo có một trong bốn loại bước:

Kết quả của lượt chơi	$d_i - d_{i-1}$
Chỉ A giải được	1
Chỉ B giải được	-1
Cả hai cùng giải được	0
Cả hai cùng không giải được	0

Điều kiện để A đạt giải đặc biệt tương đương với

$$d_i \geq -1 \quad (1 \leq i \leq n), \qquad d_n > 0.$$

Gọi $U_n(r)$ là số quỹ đạo không bị ràng buộc, có độ dài n, xuất phát từ 0 và kết thúc tại r.

Ta biến mỗi bước của quỹ đạo thành hai bước lên hoặc xuống như sau:

Bước ban đầu	Hai bước tương ứng
1	lên, lên
-1	xuống, xuống
0 ứng với cả hai cùng giải được	lên, xuống
0 ứng với cả hai cùng không giải được	xuống, lên

Đây là một song ánh giữa các quỹ đạo độ dài n kết thúc tại r và các quỹ đạo gồm $2n$ bước lên, xuống, kết thúc tại độ cao $2r$. Nếu quỹ đạo mới có a bước lên và $2n-a$ bước xuống thì

$$a-(2n-a)=2r,$$

suy ra $a=n+r$, do đó $U_n(r)=C_{2n}^{n+r}$.

Bây giờ cố định $r\geq 1$. Xét một quỹ đạo kết thúc tại r nhưng vi phạm điều kiện $d_i\geq -1$.

Gọi t là thời điểm đầu tiên quỹ đạo đạt tới -2.

Ta xét phần quỹ đạo từ thời điểm 0 đến thời điểm t: đổi mỗi bước 1 thành -1, mỗi bước -1 thành 1, còn hai loại bước 0 được giữ nguyên. Khi đó, phần quỹ đạo này kết thúc tại 2 thay vì -2.

Phần quỹ đạo sau thời điểm t có tổng độ thay đổi bằng $r-(-2)=r+2$.

Vì thế quỹ đạo mới kết thúc tại $2+(r+2)=r+4$.

Ngược lại, mọi quỹ đạo kết thúc tại $r+4$ đều phải đi qua 2. Phần quỹ đạo mới từ đầu đến lần đầu tiên đạt 2, ta thu được một quỹ đạo kết thúc tại r và vi phạm điều kiện $d_i\geq -1$.

Do đó, số quỹ đạo vi phạm kết thúc tại r bằng $U_n(r+4)$.

Bởi vậy, số quỹ đạo hợp lệ kết thúc tại r là $U_n(r)-U_n(r+4)=C_{2n}^{n+r}-C_{2n}^{n+r+4}$.

Cộng theo $r=1,2,\ldots,n$, ta được

$$\sum_{r=1}^{n}\left(C_{2n}^{n+r}-C_{2n}^{n+r+4}\right)=\sum_{r=1}^{\min\{4,n\}}C_{2n}^{n+r}.$$

Vậy số kịch bản cần tính bằng $\displaystyle\sum_{r=1}^{\min\{4,n\}}C_{2n}^{n+r}$.

Nhận xét.

Bài toán trên liên quan tới bài toán quỹ đạo nổi tiếng sau:

Bài toán bỏ phiếu bầu cử: Cho hai ứng cử viên A và B, biết rằng A nhận a phiếu bầu cử, B nhận b phiếu bầu cử và $a>b$. Hỏi có bao nhiêu cách kiểm phiếu sao cho trong suốt quá trình thì số phiếu của A luôn lớn hơn số phiếu B? Đáp số: $\dfrac{a-b}{a+b}C_{a+b}^{a}$.