SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH LÀO CAI	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2026 - 2027
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi có 03 câu, gồm 01 trang)*	Môn thi: **TOÁN** Thời gian: **180 phút** *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi: **15/9/2026**

Câu 1. *(7,0 điểm)* Giả sử a,b,c là ba trong bốn nghiệm của đa thức

$$f(x)=x^4-4x^3+2x^2+4x-2.$$

a) Chứng minh rằng abc là nghiệm của đa thức $g(x)=x^4+4x^3-4x^2-16x-8$.

b) Chứng minh rằng ab là nghiệm của đa thức

$$h(x)=x^6-2x^5-14x^4+8x^3+28x^2-8x-8.$$

Câu 2. *(7,0 điểm)* Cho tam giác ABC ($AB<AC$) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H là giao điểm của AI và BC; K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên IB và IC. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt IB, IC lần lượt tại X và Y. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của DE, DF và EF.

a) Chứng minh rằng $KL \parallel BC$ và bốn điểm K, L, X, Y cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn (MKL) và (DIP). Chứng minh rằng giao điểm của (MKL) và (DIP) thuộc đường tròn đường kính O_1O_2.

Câu 3. *(6,0 điểm)* Với mỗi số nguyên dương n, ta gọi một hoán vị $(a_0,a_1,...,a_{n-1})$ của các số $0, 1, \ldots, n-1$ là *tốt* nếu a_i+i là số chính phương với mọi $i=0,1,...,n-1$.

a) Chứng minh rằng với $n=2026$, trong một hoán vị *tốt* $(a_0,a_1,...,a_{2025})$, luôn tồn tại ít nhất một chỉ số i sao cho a_i+i chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, luôn tồn tại ít nhất một hoán vị *tốt*.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay, không được sử dụng tài liệu.
Giám thị không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH LÀO CAI	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2026 – 2027
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi có 03 câu, gồm 01 trang)*	Môn thi: **TOÁN** Thời gian: **180 phút** *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi: **16/9/2026**

Câu 4. *(6,0 điểm)* Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf\left(2x+xy\right)=xf\left(x\right)+f\left(x^2\right)f\left(y+1\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 5. *(7,0 điểm)* Xét dãy số (a_n) xác định bởi: $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=6$ và

$$a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n \text{ với mọi } n\geq 0.$$

a) Chứng minh rằng a_n chia hết cho n với mọi số nguyên dương n.

b) Với mỗi số nguyên dương m, kí hiệu $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m. Chứng minh rằng $\varphi\left(\dfrac{a_{2027}}{2027}\right)$ là một số chia hết cho 4.

Câu 6. *(7,0 điểm)* Cho tứ giác $ABCD$ không phải hình thang, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của CD; F là giao điểm của AD và BC. Các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (FCD) cắt nhau tại S. Gọi P là giao điểm SF và CD; E là giao điểm của AC và BD; H là hình chiếu của E trên SF; K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (ABE) và (CDE).

a) Chứng minh rằng các điểm K,P,M,H cùng nằm trên một đường tròn, kí hiệu là (ω).

b) Tiếp tuyến tại P của đường tròn (ω) cắt đường tròn (CDE) tại X,Y. Gọi Q là giao điểm thứ hai của KP với đường tròn (CDE). Chứng minh rằng EQ là tia phân giác của $\widehat{XEY}$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay, không được sử dụng tài liệu.
Giám thị không giải thích gì thêm.

Chương 1

CHỌN ĐTQG LÀO CAI 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Lào Cai TST - P1)

Giả sử a, b, c là ba trong bốn nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 2$.

1. Chứng minh rằng abc là nghiệm của đa thức $g(x) = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8$.
2. Chứng minh rằng ab là nghiệm của đa thức $h(x) = x^6 - 2x^5 - 14x^4 + 8x^3 + 28x^2 - 8x - 8$.

Lời giải.

Gọi a, b, c, d là bốn nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 2$. Theo định lý Viète, ta có

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 4,\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd &= 2,\\ abc+abd+acd+bcd &= -4,\\ abcd &= -2. \end{aligned}$$

1. Vì $abcd = -2$ nên $d \neq 0$ và $abc = -\dfrac{2}{d}$. Ta có

$$g(abc) = g\left(-\frac{2}{d}\right) = \frac{16}{d^4} - \frac{32}{d^3} - \frac{16}{d^2} + \frac{32}{d} - 8 = -\frac{8}{d^4}\left(d^4 - 4d^3 + 2d^2 + 4d - 2\right) = -\frac{8}{d^4} f(d) = 0.$$

Do đó abc là một nghiệm của $g(x) = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8$.

2. Đặt $y = ab$. Vì $abcd = -2$ nên $y \neq 0$ và $cd = -\dfrac{2}{y}$.

Đặt $S_1 = a + b$ và $S_2 = c + d$ thì $S_1 + S_2 = 4$, do đó $S_2 = 4 - S_1$.

Mặt khác $ab + cd + (a + b)(c + d) = 2$ nên $y - \dfrac{2}{y} + S_1 S_2 = 2$.

Đồng thời $ab(c + d) + cd(a + b) = -4$ nên $yS_2 - \dfrac{2}{y} S_1 = -4$.

Thay $S_2 = 4 - S_1$ ta được

$$y(4 - S_1) - \frac{2}{y} S_1 = -4 \iff S_1\left(y + \frac{2}{y}\right) = 4y + 4.$$

Suy ra $S_1 = \dfrac{4y(y+1)}{y^2+2}$. Thay $S_2 = 4 - S_1$ vào $y - \dfrac{2}{y} + S_1 S_2 = 2$ ta có $S_1^2 - 4S_1 + 2 - y + \dfrac{2}{y} = 0$ hay

$$\left(\frac{4y(y+1)}{y^2+2}\right)^2 - 4\left(\frac{4y(y+1)}{y^2+2}\right) + 2 - y + \frac{2}{y} = 0.$$

$$\iff 16y^3(y+1)^2 - 16y^2(y+1)(y^2+2) + (-y^2 + 2y + 2)(y^2+2)^2 = 0.$$

$$\iff -y^6 + 2y^5 + 14y^4 - 8y^3 - 28y^2 + 8y + 8 = 0,$$

$$\iff y^6 - 2y^5 - 14y^4 + 8y^3 + 28y^2 - 8y - 8 = 0.$$

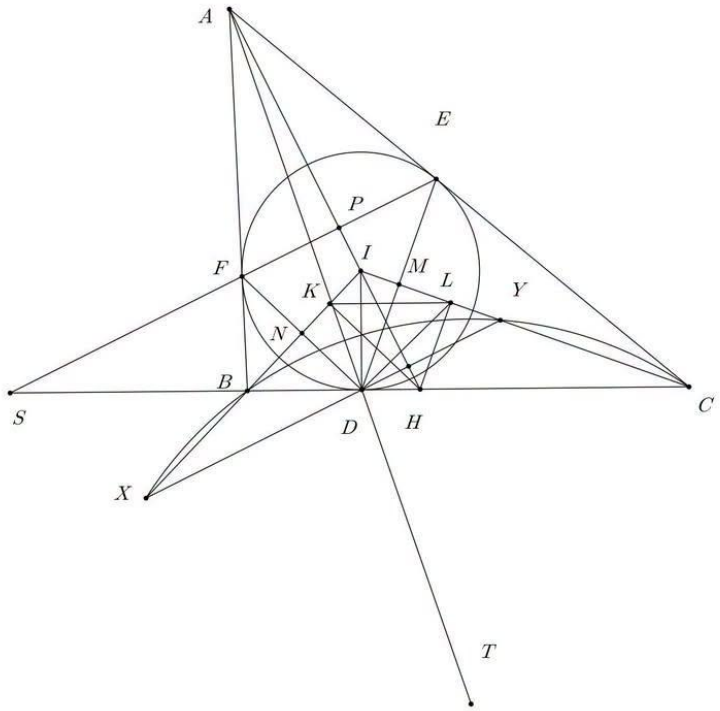
Do đó $h(y) = 0$. Vì $y = ab$, suy ra ab là một nghiệm của

$$h(x) = x^6 - 2x^5 - 14x^4 + 8x^3 + 28x^2 - 8x - 8.$$

Bài toán 0.2. **(Lim Olympic - Lào Cai TST - P2)**

Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H là giao điểm của AI và BC; K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên IB và IC. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AI, cắt IB, IC lần lượt tại X, Y. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của DE, DF, EF.

1. Chứng minh rằng $KL//BC$ và bốn điểm K, L, X, Y cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn (MKL) và (DIP). Chứng minh rằng giao điểm của (MKL) và (DIP) thuộc đường tròn đường kính O_1O_2.



Lời giải.

1. Ta có $\angle ILK = \angle IKH = 90^\circ - \angle BIH = 90^\circ - (\angle IAB + \angle IBA) = \angle ICB \Rightarrow KL//BC$.

   Ta có $\angle IXY = 90^\circ - \angle BIH = \angle ICB \Rightarrow BXCY$ nội tiếp.

   $\Rightarrow \angle IYX = \angle IBC = \angle IKL \Rightarrow KLYX$ nội tiếp.

2. Do $KL//BC \Rightarrow IL \cdot IB = IK \cdot IC$, mà $IM \cdot IC = IN \cdot IB \Rightarrow IK \cdot IN = IM \cdot IL \Rightarrow (KML)$ đi qua N. Lại có $\angle IDL = \angle IHL = \angle IYD$ do các tứ giác nội tiếp $\Rightarrow IL \cdot IY = ID^2$. Tương tự ta cũng có $IK \cdot IX = ID^2$.

   Ta thấy điều cần chứng minh tương đương với việc chứng minh (MKL) và (DIP) trực giao. Xét phép nghịch đảo tâm I phương tích $ID^2 = IM \cdot IC = IN \cdot IB$ có: $A \leftrightarrow P$, $M \leftrightarrow C$, $L \leftrightarrow Y$, $N \leftrightarrow B$ nên $(MKLN) \leftrightarrow (BCXY)$ và $(DIP) \leftrightarrow AD$.

   Vậy ta cần chứng minh AD đi qua tâm T của $(BCXY)$. Gọi EF cắt BC tại S ta có $(SDBC) = -1 \Rightarrow S$ nằm trên đường đối cực ứng với D của (T), mà BX cắt CY tại $I \Rightarrow I$ cũng nằm trên

đường đối cực ứng với D của $(T) \Rightarrow SI$ là đường đối cực ứng với D của $(T) \Rightarrow DT \perp SI$. Mà AD là đường đối cực của S ứng với (I) nên ta cũng có $SI \perp AD \Rightarrow A, D, T$ thẳng hàng hay ta có điều cần chứng minh.

Bài toán 0.3. **(Lim Olympic - Lào Cai TST - P3)**

Với mỗi số nguyên dương n, ta gọi một hoán vị $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ của các số $0, 1, \ldots, n-1$ là **tốt** nếu $a_i + i$ là số chính phương với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

1. Chứng minh rằng với $n = 2026$, trong một hoán vị tốt $(a_0, a_1, \ldots, a_{2025})$, luôn tồn tại ít nhất một chỉ số i sao cho $a_i + i$ chia hết cho 9.
2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, luôn tồn tại ít nhất một hoán vị tốt.

Lời giải.

1. Giả sử ngược lại rằng không có $a_i + i$ nào chia hết cho 9. Vì $a_i + i$ là số chính phương, nếu nó chia hết cho 3 thì nó phải chia hết cho 9. Do đó mọi $a_i + i$ đều không chia hết cho 3, nên $a_i + i \equiv 1 \pmod 3$. Suy ra
$$\sum_{i=0}^{2025} (a_i + i) \equiv 2026 \equiv 1 \pmod 3.$$
Nhưng $(a_0, \ldots, a_{2025})$ là một hoán vị của $(0, \ldots, 2025)$, nên
$$\sum_{i=0}^{2025} (a_i + i) = 2\sum_{i=0}^{2025} i = 2025 \cdot 2026 \equiv 0 \pmod 3,$$
mâu thuẫn. Vậy chỉ số cần tìm luôn tồn tại.

2. Ta xây dựng bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$, lấy $a_0 = 0$.

Giả sử $n \geq 2$. Chọn s là số chính phương nhỏ nhất không nhỏ hơn $n-1$ và đặt
$$l = s - (n-1).$$
Ta có $0 \leq l \leq n-1$. Thật vậy, nếu $k^2 < n-1 < (k+1)^2$ thì
$$s = (k+1)^2 \leq 2(k^2+1) \leq 2(n-1);$$
còn trường hợp $n-1$ thì hiển nhiên.

Trên đoạn chỉ số $l \leq i \leq n-1$, đặt $a_i = s - i$. Khi i chạy từ l đến $n-1$, các giá trị a_i chạy qua đúng các số từ $n-1$ xuống l, và cũng có được
$$a_i + i = s$$
là số chính phương. Theo giả thiết quy nạp, trên các chỉ số $0, 1, \ldots, l-1$ tồn tại một hoán vị tốt của các số $0, 1, \ldots, l-1$. Ghép hai phần lại, ta thu được một hoán vị tốt của $0, 1, \ldots, n-1$.

Vậy hoán vị tốt tồn tại với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chương 2

CHỌN ĐTQG LÀO CAI 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Lào Cai TST - P4)

Tìm tất cả các hàm số $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(2x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y+1), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải.

Thay y bởi $y-1$, phương trình trở thành

$$xf\big(x(y+1)\big) = xf(x) + f(x^2)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hàm $f \equiv 0$ hiển nhiên thỏa mãn. Từ đây ta giả sử f không đồng nhất bằng 0.

Cho $x = 0$ trong (1), ta được $f(0)f(y) = 0$ với mọi y, nên $f(0) = 0$.

Đặt $a = f(1)$. Từ (1) với $x = 1$ suy ra

$$f(y+1) = a\big(1 + f(y)\big). \tag{2}$$

Nếu $a = 0$ thì (2) cho $f \equiv 0$, trái với giả thiết. Vậy $a \neq 0$. Thế $y = -1$ vào (2), ta có $f(-1) = -1$.

Tiếp tục cho $y = -1$ trong (1), ta được

$$f(x^2) = xf(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (1) và (3), với $x \neq 0$, ta có được $f\big(x(y+1)\big) = f(x)\big(1 + f(y)\big)$.

Dùng (2), rồi đặt $z = y+1$ để suy ra được

$$f(xz) = \frac{f(x)f(z)}{a}, \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{a}$ thì g là hàm nhân, $g(1) = 1$. Với $x \neq 0$, ta có $g(x)g(1/x) = 1$, nên $g(x) \neq 0$.

Từ (3) và tính nhân ta suy ra được $ag(x)^2 = axg(x)$ với mọi $x \neq 0$, do đó $g(x) = x$ với mọi $x \neq 0$; và đẳng thức cũng đúng tại $x = 0$. Vậy $f(x) = ax$ với mọi x. Thử lại ta có $a = 1$ nên $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó tất cả hàm số cần tìm là $f \equiv 0$ và $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Lào Cai TST - P5)

Xét dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 6$ và

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n, \qquad n \geq 0.$$

1. Chứng minh rằng a_n chia hết cho n với mọi số nguyên dương n.
2. Với mỗi số nguyên dương m, kí hiệu $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m. Chứng minh rằng $\varphi\left(\dfrac{a_{2027}}{2027}\right)$ là một số chia hết cho 4.

Lời giải.

Gọi (F_n) là dãy Fibonacci, để ý $a_n = nF_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1. Khi đó rõ ràng a_n chia hết cho n với mọi số nguyên dương n.
2. Ta có $a_{2027} = nF_{2027}$ nên ta quy về chứng minh $\varphi(F_{2027})$ chia hết cho 4.

Để ý $F_n \pmod 4$ theo chu kì $0,1,1,2,3,1$ và $F_n \pmod 5$ theo chu kì $0,1,1,2,0,2,2,1$.

Hơn nữa vì $2027 \equiv 5 \pmod 6$ và $2027 \equiv 3 \pmod 8$, ta có

$$F_{2027} \equiv 1 \pmod 4, \qquad F_{2027} \equiv 2 \pmod 3.$$

Do đó, F_{2027} là số lẻ và không phải số chính phương.

Giả sử $4 \nmid \varphi(N)$. Viết $F_{2027} = \prod_{i=1}^{s} q_i^{e_i}$ với các q_i là các số nguyên tố lẻ phân biệt. Khi đó

$$\varphi(F_{2027}) = \prod_{i=1}^{s} q_i^{e_i-1}(q_i - 1).$$

Mỗi $q_i - 1$ đều chẵn. Vì $4 \nmid \varphi(F_{2027})$, ta buộc phải có $s = 1$ và $q_1 \equiv 3 \pmod 4$.

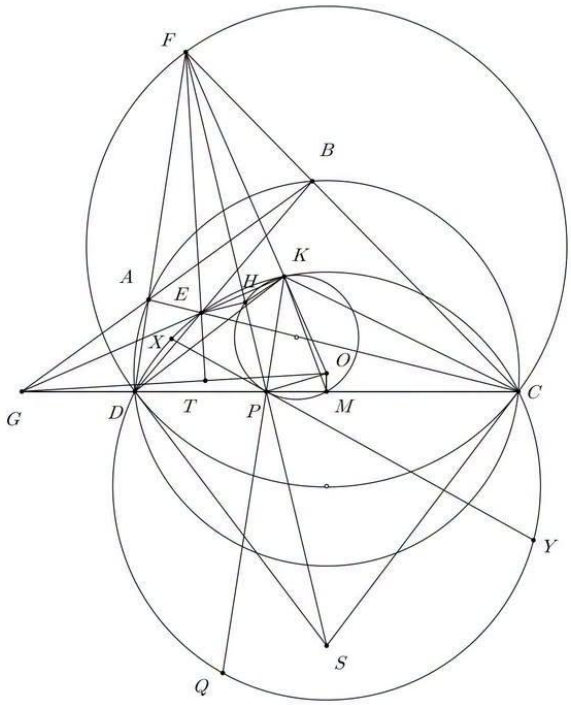
Do $N \equiv 1 \pmod 4$, số mũ e_1 phải chẵn, khiến F_{2027} là số chính phương, mâu thuẫn. Vậy

$$4 \mid \varphi(F_{2027}) = \varphi\left(\frac{a_{2027}}{2027}\right).$$

Bài toán 0.6. **(Lim Olympic - Lào Cai TST - P6)**

Cho tứ giác $ABCD$ không phải hình thang, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của CD; F là giao điểm của AD và BC. Các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (FCD) cắt nhau tại S. Gọi P là giao điểm của SF và CD; E là giao điểm của AC và BD; H là hình chiếu của E trên SF; K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (ABE) và (CDE).

1. Chứng minh rằng các điểm K, P, M, H cùng nằm trên một đường tròn, kí hiệu là (ω).
2. Tiếp tuyến tại P của đường tròn (ω) cắt đường tròn (CDE) tại X, Y. Gọi Q là giao điểm thứ hai của KP với đường tròn (CDE). Chứng minh rằng EQ là tia phân giác của $\widehat{XEY}$.



Lời giải.

(1) Gọi AB cắt CD tại G. Theo định lí *Brocard* ta có O là trực tâm ΔFEG.

Gọi $FE \perp OG$ tại T và $GE \perp FO$ tại K'

$\Rightarrow T(GFAB) = -1$ mà $TF \perp TG \Rightarrow TO$ là phân giác ngoài $\angle ATB$.

Mà $OA = OB \Rightarrow ATOB$ nội tiếp $\Rightarrow GC \cdot GD = GA \cdot GB = GT \cdot GO = GE \cdot GK'$

$\Rightarrow K'$ nằm trên (ECD) và $(EAB) \Rightarrow K'$ trùng $K \Rightarrow EHKF$ và $GKOM$ nội tiếp.

$\Rightarrow \angle KHF = \angle KEF = \angle KOG = \angle KMG \Rightarrow HKMP$ nội tiếp.

(2) Do $OTAB$ nội tiếp mà OT cắt AB tại G.

$\Rightarrow OT \cdot OG = OA^2 = OB^2 \Rightarrow OK \cdot OF = OC^2 = OD^2$.

$\Rightarrow \Delta OCK \sim \Delta OAC$ và $\Delta ODK \sim \Delta OAD$.

$\Rightarrow \dfrac{KC}{KD} = \dfrac{FC}{FD}$, mà FP là đối trung của ΔFCD.

$\Rightarrow \dfrac{KC^2}{KD^2} = \dfrac{FC^2}{FD^2} = \dfrac{PC}{PD} \Rightarrow KP$ cũng là đối trung của ΔKCD.

$\Rightarrow (KPM)$ tiếp xúc (KCD) nên theo bổ đề tiếp xúc ta có Q là trung điểm cung nhỏ XY của $(KCD) \Rightarrow EQ$ là phân giác $\angle XEY$.