1 Ngày thi thứ nhất

Câu 1. Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc $d \geqslant 5$, hệ số cao nhất bằng 1 và $P'(x) > 0$ với mọi $x \geqslant 1$. Xét dãy số $(x_n)_{n\geqslant 1}$ xác định bởi

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{P'(n)}{P(n+1) - P(n)} x_n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

a) Xét dãy số $(y_n)_{n\geqslant 1}$ xác định bởi $y_n = n\left(\dfrac{P(n+1) - P(n)}{P'(n)} - 1\right),\ n \geqslant 1.$

Chứng minh rằng các dãy $(x_n), (y_n)$ đều hội tụ và tìm các giới hạn tương ứng.

b) Đặt $z_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Chứng minh rằng dãy (z_n) hội tụ.

Câu 2. Cho hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f(x) + f(y) + f(z) + f(t) \leqslant f(x + y + z + t) \leqslant 4 \max\{f(x), f(y), f(z), f(t)\}$$

với mọi $x, y, z, t > 0$.

a) Chứng minh rằng f tăng ngặt và $f(2026) = 2026$.

b) Tìm tất cả hàm số f thỏa mãn bài toán.

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. Điểm P di động trên đường thẳng BC và nằm ngoài đoạn BC. OP lần lượt cắt AC, AB tại Q, R. Dựng Y, Z lần lượt là hình chiếu của Q, R lên AB, AC.

a) Chứng minh rằng YZ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

b) Gọi giao điểm của QY và RZ là S, SH và YZ là X. Chứng minh rằng $XA \perp XP$.

Câu 4. Cho số nguyên dương $k > 1$. Với mỗi số nguyên dương n, gọi $\sigma_k(n)$ là tổng lũy thừa bậc k của các ước nguyên dương của n. Gọi n là một số **tốt** nếu $n \mid \sigma_k(n)$.

a) Chứng minh rằng $\sigma_k(n)$ là hàm nhân tính và tồn tại một dãy vô hạn các số **tốt** $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ sao cho $n_i \mid n_{i+1}$ với mọi $i \geqslant 1$.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương r, tồn tại một số **tốt** có ít nhất r ước nguyên tố phân biệt.

2 Ngày thi thứ hai

Câu 5. Cho tam giác ABC không cân ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi K là trực tâm của tam giác BIC.

a) CK, BK lần lượt cắt DE, DF tại S, T, và ST cắt EF tại R. Chứng minh rằng $IR \perp AK$.

b) Chứng minh rằng AK, BC và đường thẳng Euler của tam giác KBC đồng quy hoặc đôi một song song.

Câu 6. Cho đa thức monic

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

với $n > 2$, hệ số thực, tất cả nghiệm của $P(x)$ đều là số thực và khác 0.

a) Chứng minh rằng $2026a_k^2 + 2027a_{k+1}^2 > 0$ với mọi $k = 0, 1, \ldots, n-2$.

b) Hỏi số lượng hệ số khác 0 của đa thức $P(x)$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Câu 7. Cho hai số nguyên n, k thỏa mãn $2 \leqslant k < n$. Trong một lễ hội, có n ngọn đèn được đặt trên một vòng tròn và đánh số $1, 2, \ldots, n$ theo chiều kim đồng hồ. Mỗi ngọn đèn ở một trong hai trạng thái: sáng hoặc tắt.

Trong mỗi lượt ghi, trạng thái của các ngọn đèn được giữ cố định. Một người đi quanh vòng tròn theo chiều kim đồng hồ. Khi đứng tại ngọn đèn thứ i, người đó ghi lại số ngọn đèn đang sáng trong k ngọn đèn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ ngọn đèn thứ i; sau ngọn đèn thứ n lại đến ngọn đèn thứ 1. Gọi số ghi được tại ngọn đèn thứ i là s_i. Sau một vòng, người đó thu được bản ghi $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

a) Xác định điều kiện của n, k để với mọi cách bố trí trạng thái của các ngọn đèn, bản ghi $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ xác định duy nhất cách bố trí đó.

b) Trong suốt lễ hội, trạng thái của các ngọn đèn có thể được thay đổi tùy ý giữa các lượt ghi. Xác định số bản ghi $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ phân biệt có thể thu được.

Chương 1

CHỌN ĐTQG NGHỆ AN 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Nghệ An TST - P1)

Cho $P(x)$ là đa thức thỏa mãn $\deg P = d \geq 5$ và $P'(x) > 0$ với mọi $x \geq 1$.

Xét dãy (x_n) được xác định bởi $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = \dfrac{P'(n)}{P(n+1) - P(n)} x_n$ với mọi $n \geq 1$.

1. Xét dãy (y_n) được xác định bởi $y_n = n\left(\dfrac{P(n+1) - P(n)}{P'(n)} - 1\right)$ với mọi $n \geq 1$.

   Chứng minh rằng hai dãy (x_n), (y_n) hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

2. Đặt $z_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (z_n) hội tụ.

Lời giải.

1. Viết $P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_0$ với $a_d > 0$ do $P'(x) > 0,\ \forall x \geq 1$.

   Đặt $Q(n) = P(n+1) - P(n) - P'(n)$ thì Q là đa thức bậc $d-2$ có hệ số cao nhất bằng $a_d C_d^2$. Mặt khác, P' là đa thức bậc $d-1$ có hệ số cao nhất bằng da_d. Vì vậy

   $$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{nQ(n)}{P'(n)} = \frac{a_d C_d^2}{da_d} = \frac{d-1}{2}.$$

   Vì $P'(x) > 0$ trên $[1, +\infty)$ nên P tăng ngặt trên khoảng này. Bởi vậy $x_n > 0$ với mọi $n \geq 1$ và

   $$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{P(n+1) - P(n)}{P'(n)} = 1 + \frac{y_n}{n}.$$

   Do $d \geq 5$ nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta đều có $y_n \geq 1$. Khi đó với mọi $n \geq N$ thì

   $$x_{n+1} \leq \frac{x_n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} x_n.$$

   Nhân liên tiếp các bất đẳng thức trên, với $n \geq N$ ta được

   $$0 < x_n \leq \frac{N}{n} x_N.$$

   Theo nguyên lý kẹp ta suy ra được $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2. Chọn hai số thực α, β sao cho $1 < \alpha < \beta < \dfrac{d-1}{2}$.

   Vì $y_n \to \dfrac{d-1}{2}$ nên $y_n > \beta$ với mọi n đủ lớn.

   Lại có $\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1\right) = \alpha < \beta$ theo Lagrange cho hàm số $f(x) = x^{\alpha}$ trên $\left(1, 1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

   Do đó, với mọi n đủ lớn, ta có được

   $$1 + \frac{y_n}{n} \geq 1 + \frac{\beta}{n} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha}.$$

   Từ $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = 1 + \dfrac{y_n}{n}$, ta thu được $x_{n+1} \leq x_n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$ với mọi n đủ lớn.

Nhân liên tiếp để suy ra tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$0 < x_n \leq \frac{C}{n^\alpha}$$

với mọi n đủ lớn. Vì $\alpha > 1$ nên chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ bằng cách sử dụng định lý Lagrange cho hàm số $g(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ trên $(n, n+1)$. Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $z_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.

Nhận xét.

Bản chất trong chứng minh trên ta đã chứng minh lại **tiêu chuẩn Raabe** như sau:
Với chuỗi số thực dương $\sum a_n$ thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ thì chuỗi hội tụ.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Nghệ An TST - P2)

Cho hàm số $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f(x) + f(y) + f(z) + f(t) \leq f(x+y+z+t) \leq 4\max\{f(x), f(y), f(z), f(t)\}$$

với mọi $x, y, z, t > 0$.

1. Chứng minh rằng f tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$ và $f(2026) \geq 2026$.
2. Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn.

Lời giải.

1. Trước hết, lấy $0 < x < y$ và đặt $h = \dfrac{y-x}{3} > 0$. Thay (x, y, z, t) bởi (x, h, h, h) để suy ra

$$f(u) = f(x+3h) \geq f(x) + 3f(h) > f(x).$$

Vậy f tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$.

Tiếp theo, thay (x, y, z, t) bởi $(n, 1, 1, 1)$ suy ra

$$f(n+3) \geq f(n) + 3f(1) = f(n) + 3.$$

Bằng quy nạp suy ra được $f(3n+1) \geq 3n+1$ với mọi số nguyên $n \geq 0$, do đó $f(2026) \geq 2026$.

2. **Cách 1.** Cố định $x > 0$. Với mỗi m đủ lớn, gọi a_m là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn

$$a_m \equiv 1 \pmod 3, \qquad a_m \leq 4^m x.$$

Ta có $0 \leq 4^m x - a_m < 3$, nên $a_m/4^m \to x$. Bởi tính tăng ngặt của f và nhận xét trên nên

$$4^m f(x) = f(4^m x) \geq f(a_m) \geq a_m f(1) = a_m.$$

Cho $m \to \infty$ suy ra $f(x) \geq x$.

Tương tự, gọi b_m là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn

$$b_m \equiv 1 \pmod 3, \qquad b_m x \leq 4^m.$$

Khi đó $0 \leq 4^m/x - b_m < 3$, nên $4^m/b_m \to x$. Ta có

$$b_m f(x) \leq f(b_m x) \leq f(4^m) = 4^m.$$

Cho $m \to \infty$ suy ra $f(x) \leq x$. Do đó $f(x) = x$ với mọi $x > 0$.

Cách 2. Cho $x = y = z = t = u$ trong giả thiết, khi đó $4f(u) \leq f(4u) \leq 4f(u)$ nên

$$f(4u) = 4f(u), \qquad \forall u > 0$$

Từ đây ta suy ra được với mọi $x, y, z, t > 0$ thì

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)+f(t)}{4} \le \frac{f(x+y+z+t)}{4} = f\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right).$$

Hơn nữa, khi thay (x, y, z, t) bởi (x, x, y, y) ta được

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad \forall x, y > 0$$

Ta có $f(2u) \ge \dfrac{f(u)+f(3u)}{2}$ và $f(3u) \ge \dfrac{f(2u)+f(4u)}{2} = \dfrac{f(2u)+4f(u)}{2}$ nên

$$f(2u) \ge \frac{f(u)}{2} + \frac{f(3u)}{2} \ge \frac{f(u)}{2} + \frac{f(2u)+4f(u)}{4} = \frac{f(2u)}{4} + \frac{3f(u)}{2}$$

Suy ra $f(2u) \ge 2f(u)$ nên $f(u) \ge 2f\left(\dfrac{u}{2}\right)$.

Mặt khác $f(2u) = 4f\left(\dfrac{u}{2}\right)$ nên $f(u) \ge \dfrac{f(2u)}{2}$, hay $f(2u) \le 2f(u)$. Vậy $f(2u) = 2f(u)$ với mọi $u > 0$.

Vì vậy với mọi $x, y > 0$, ta có $f(x+y) = 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \ge f(x) + f(y)$.

Từ $f(1) = 1$ và $f(2u) = 2f(u)$, bằng cách lặp lại ta được $f(2^k) = 2^k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Xét $r = \dfrac{m}{2^n}$, trong đó $m \in \mathbb{N}^*$ và $n \in \mathbb{N}$, khi đó ta có $f\left(\dfrac{m}{2^n}\right) \ge mf\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{m}{2^n}$.

Chọn $N > m$ là lũy thừa của 2, ta có $f\left(\dfrac{N}{2^n}\right) = \dfrac{N}{2^n}$ và $f\left(\dfrac{N-m}{2^n}\right) \ge (N-m)f\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{N-m}{2^n}$.

Bởi vậy $\dfrac{N}{2^n} = f\left(\dfrac{N}{2^n}\right) \ge f\left(\dfrac{m}{2^n}\right) + f\left(\dfrac{N-m}{2^n}\right) \ge f\left(\dfrac{m}{2^n}\right) + \dfrac{N-m}{2^n}$.

Suy ra $f\left(\dfrac{m}{2^n}\right) \le \dfrac{m}{2^n}$ nên $f(r) = r$ với mọi $r > 0$ có dạng $r = \dfrac{m}{2^n}$ với $m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}$.

Cuối cùng, với $x > 0$ tùy ý, đặt $r_n = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ và $s_n = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n}$ với mọi n đủ lớn.

Khi đó $r_n \to x$ và $s_n \to x$. Vì f đồng biến nên $r_n = f(r_n) \le f(x) \le f(s_n) = s_n$.

Cho $n \to \infty$, ta được $f(x) = x$ với mọi $x > 0$, thử lại thấy thoả mãn.

Bài toán 0.3. **(Lim Olympic - Nghệ An TST - P3)**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Điểm P nằm trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn BC. Đường thẳng OP cắt AB, AC lần lượt tại R, Q. Lấy $Z \in AC$, $Y \in AB$ sao cho $RZ \perp AC$ và $QY \perp AB$.

1. Chứng minh rằng đường thẳng YZ đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.
2. Hai đường thẳng QY và RZ cắt nhau tại S. Đường thẳng SH cắt YZ tại X. Chứng minh rằng $XA \perp XP$.

Lời giải.

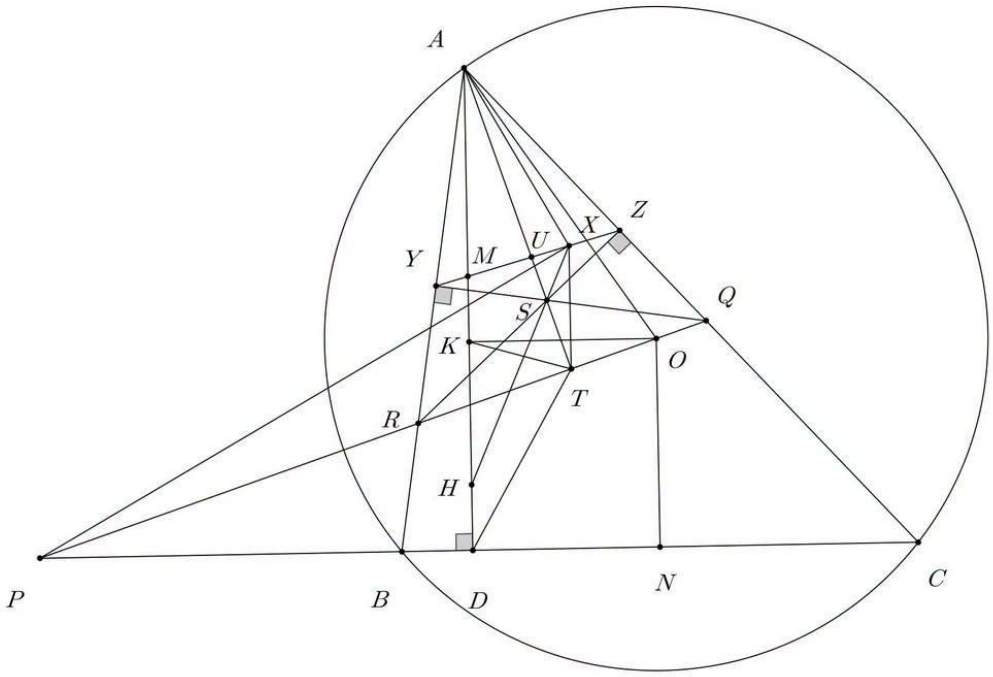
Cách 1.

1. Gọi AH cắt YZ tại M.

Ta dễ có $\Delta AMY \sim \Delta AOQ$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{AY}{AQ} = \cos BAC \Rightarrow AM = AO \cdot \cos BAC$.

Gọi N là trung điểm BC ta có $AH = 2ON = 2AO \cdot \cos NOC = 2AO \cdot \cos BAC \Rightarrow 2AM = AH$.

$\Rightarrow YZ$ đi qua M là trung điểm AH cố định.

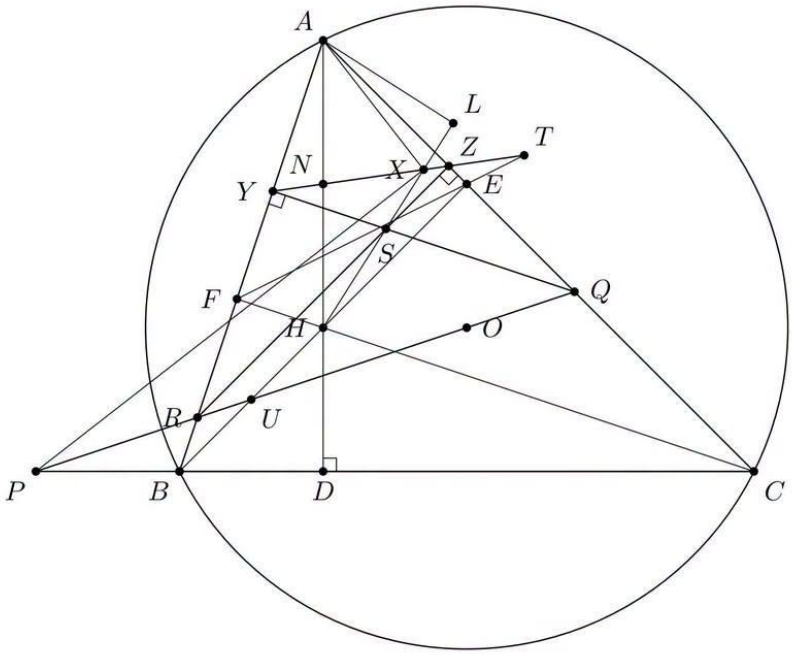


2 Gọi D, T lần lượt là hình chiếu của A trên BC, RQ.

Gọi YZ cắt AT tại U và K là hình chiếu của O trên AD.

Ta có $-1 = X(ASTU) = X(AHTM)$ mà M là trung điểm $AH \Rightarrow XT // AH$.

Lại có tứ giác $AKTO$ nội tiếp $\Rightarrow \angle MKT = \angle AOQ = \angle AMY = \angle KMX \Rightarrow MKTX$ là hình thang cân $\Rightarrow MK, XT$ có chung trung trực. Mà $AM = \dfrac{1}{2}AH = ON = DK \Rightarrow AD$ và MK có chung trung trực nên ta có $AXTD$ là hình thang cân $\Rightarrow 5$ điểm A, X, T, D, P cùng nằm trên đường tròn đường kính $AP \Rightarrow \angle AXP = 90^\circ$.



Cách 2.

(1) Xét phép vị tự quay f tâm A, biến B thành E. Ta có $\dfrac{AE}{AB} = \cos A = \dfrac{AF}{AC}$, suy ra $f(C) = F$.

Mặt khác, ta có $\angle ARZ = \angle ABE = 90^\circ$, $\angle AQY = \angle ACF = 90^\circ$, đồng thời $\angle RAZ = \angle BAE$ và $\angle QAY = \angle CAF$. Do đó $f(R) = Z$ và $f(Q) = Y$.

Suy ra $f((ABC)) = (AEF)$. Vì bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH nên tâm của (AEF) là N. Do đó $f(O) = N$.

Vì O, R, Q thẳng hàng nên N, Z, Y thẳng hàng. Vậy đường thẳng YZ luôn đi qua điểm cố định N.

(2) Lấy $T = EF \cap YZ$. Vì $f(BC) = EF$, $f(QR) = YZ$ và $P = BC \cap QR$ nên $f(P) = T$.

Do $RZ \perp AC$ và $QY \perp AB$ nên S là trực tâm của tam giác AQR. Suy ra bốn điểm A, Y, S, Z cùng thuộc đường tròn đường kính AS.

Gọi $L \neq A$ là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $(AEFH)$ và $(AYSZ)$.

Khi đó $\angle ALH \equiv \angle ALS = 90^\circ$, suy ra H, L, S thẳng hàng. Do đó $X = HL \cap NT$.

Áp dụng định lí *Miquel* cho tứ giác toàn phần tạo bởi bốn đường thẳng AB, AC, EF, YZ, ta được bốn điểm F, Y, T, L đồng viên. Vì thế $\angle LTN = \angle LTY = \angle LFY = \angle LFA = \angle LHA$.

Vì N là tâm của $(AEFH)$ nên $NA = NL$. Do đó $\angle NLA \equiv \angle LAN \pmod{\pi}$.

Lại có $LH \perp LA$ và A, N, H thẳng hàng nên $\angle NLH = \angle LHA$. Suy ra $\angle LTN = \angle NLH = \angle NLX$.

Mặt khác, do N, T, X thẳng hàng nên $\angle LNT = \angle LNX$. Bởi vậy $\triangle NLT \sim \triangle NXL$.

Từ đó $\dfrac{NL}{NX} = \dfrac{NT}{NL}$, hay $NX \cdot NT = NL^2 = NA^2$.

Đặt $U = f^{-1}(X)$. Vì $f(O) = N$, $f(P) = T$ và $f(U) = X$, khi đó ta có $OU \cdot OP = OA^2$.

Vậy U là ảnh nghịch đảo của P qua đường tròn (O).

Do $P \in BC$, còn B, C nằm trên (O) nên U thuộc đường tròn (OBC).

Gọi $V \neq O$ là giao điểm thứ hai của AO với (OBC). Ta có $f((OBC)) = (NEF)$ và $f(AO) = AN = AD$. Mà (NEF) cắt AD tại N, D, đồng thời $f(O) = N$, nên $f(V) = D$.

Vì bốn điểm O, U, V, B đồng viên nên $\angle(UO, UV) \equiv \angle(BO, BV) \pmod{\pi}$.

Do $OA = OB$, ta có $\angle(BO, AB) \equiv \angle(AB, AO) \pmod{\pi}$. Mặt khác, $\angle(AB, BV) \equiv \angle(BC, AB) \pmod{\pi}$. Suy ra $\angle(BO, BV) \equiv \angle(BC, AO) \pmod{\pi}$, và do đó $\angle(UO, UV) \equiv \angle(BC, AO) \pmod{\pi}$.

Từ $OU \cdot OP = OA^2$ và O, U, P thẳng hàng, ta có $\triangle OUA \sim \triangle OAP$.

Vì thế $\angle(AU, UO) \equiv \angle(AO, AP) \pmod{\pi}$.

Do đó $\angle(AU, UV) \equiv \angle(AO, AP) + \angle(BC, AO) \equiv \angle(BC, AP) \pmod{\pi}$.

Vì $f(U) = X$, $f(V) = D$ nên $\angle(AX, XD) \equiv -\angle(AU, UV) \equiv \angle(AP, BC) \equiv \angle APD \pmod{\pi}$.

Vậy bốn điểm A, X, D, P cùng thuộc một đường tròn.

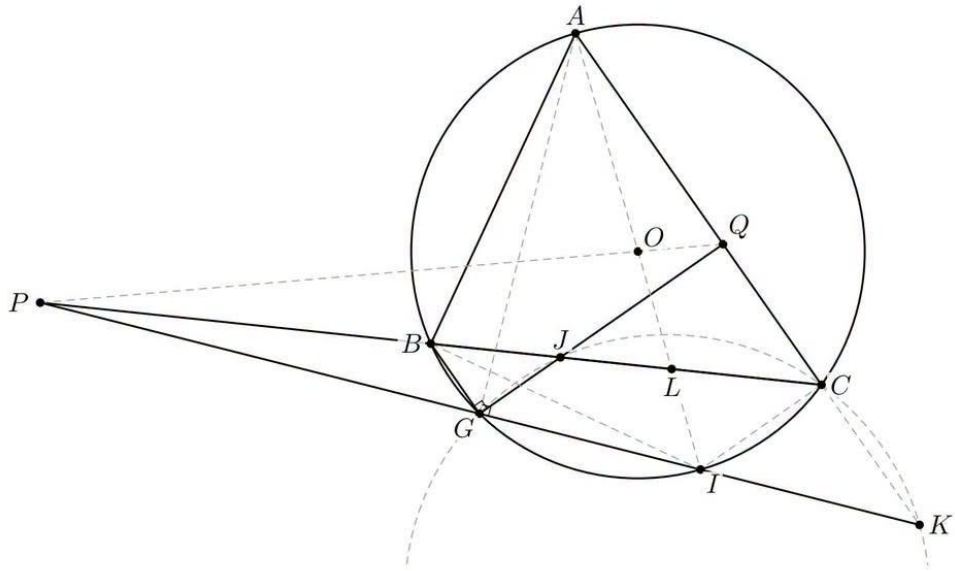
Mà $AD \perp DP$ nên $\angle AXP = \angle ADP = 90^\circ$. Suy ra $XA \perp XP$.

Cách 3. (Lời giải của bạn Đỗ Đức Việt Hưng)

Đầu tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 0.1.

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). P là điểm bất kì nằm trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn thẳng BC. Gọi AO cắt (O) tại I, PI cắt (O) tại G. Lấy Q thuộc AC sao cho $\angle BGQ = 90^\circ$. Chứng minh rằng P, O, Q thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi GQ cắt BC tại J, AI cắt BC tại L, AC cắt PI tại K.

Ta có: $\angle AGI = \angle BGQ = 90^\circ \implies \angle QGK = \angle BGA = \angle BCA = \angle QCJ$.

$\implies$ Tứ giác $CJGK$ nội tiếp $\implies \triangle PGJ \sim \triangle PCK \implies \dfrac{GJ}{CK} = \dfrac{PG}{PC}$.

Mà ta có $\triangle PGB \sim \triangle PCI$ do tứ giác $BGIC$ nội tiếp nên $\dfrac{GJ}{CK} = \dfrac{PG}{PC} = \dfrac{BG}{CI}$.

Ngoài ra, ta có: $\angle GBJ = \angle GBC = \angle GAC = \angle GAK$ và $\angle BGJ = \angle AGK = 90^\circ$.

$\implies \triangle BGJ \sim \triangle AGK \implies \dfrac{GB}{GJ} = \dfrac{GA}{GK}$. Ta có:

$$\frac{QA}{QK} = \frac{S_{GQA}}{S_{GQK}} = \frac{\sin\angle AGQ \cdot GA}{\sin\angle QGK \cdot GK} = \frac{\sin\angle AGQ}{\sin\angle QGK} \cdot \frac{GB}{GJ}$$

Theo Menelaus ta có: $\dfrac{AC}{CK} \cdot \dfrac{LI}{LA} \cdot \dfrac{PK}{PI} = 1 \implies \dfrac{PK}{PI} = \dfrac{CK}{AC} \cdot \dfrac{LA}{LI}$ nên

$$\frac{QA}{QK} \cdot \frac{OI}{OA} \cdot \frac{PK}{PI} = \frac{\sin\angle AGQ}{\sin\angle QGK} \cdot \frac{GB}{GJ} \cdot \frac{CK}{AC} \cdot \frac{LA}{LI}$$

$$\frac{QA}{QK} \cdot \frac{OI}{OA} \cdot \frac{PK}{PI} = \frac{\sin\angle AGQ}{\sin\angle QGK} \cdot \frac{GB}{AC} \cdot \frac{CI}{BG} \cdot \frac{LA}{LI}$$

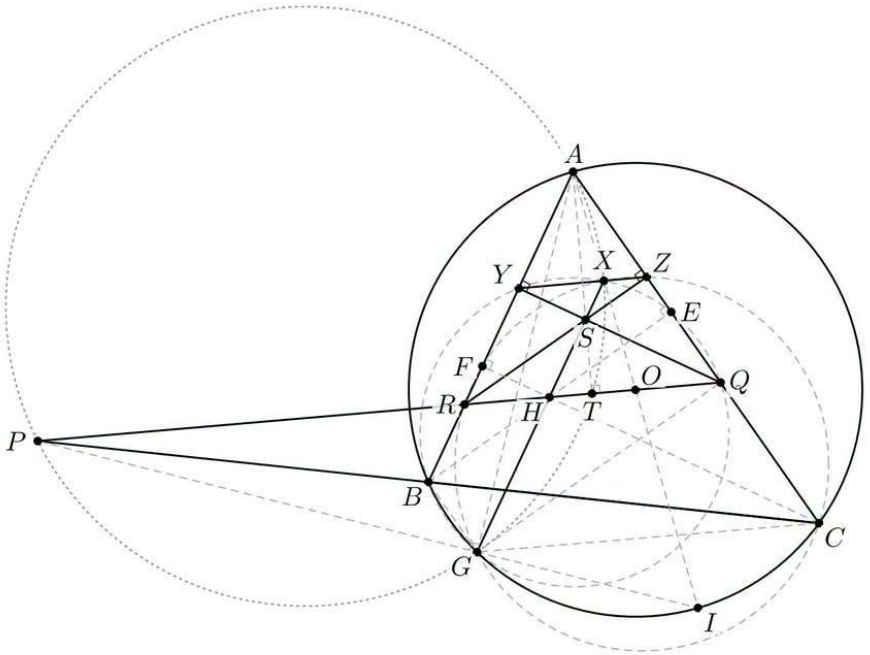
$$\frac{QA}{QK} \cdot \frac{OI}{OA} \cdot \frac{PK}{PI} = \frac{\sin\angle AGQ}{\sin\angle QGK} \cdot \frac{GB}{AC} \cdot \frac{CI}{BG} \cdot \frac{CA}{CI} \cdot \frac{BA}{BI}$$

$$\frac{QA}{QK} \cdot \frac{OI}{OA} \cdot \frac{PK}{PI} = \frac{\sin\angle AGQ}{\sin\angle QGK} \cdot \frac{BA}{BI}$$

Theo định lý sin ta có: $\dfrac{BA}{BI} = \dfrac{\sin\angle BIA}{\sin\angle BAI} = \dfrac{\sin\angle BCA}{\sin\angle(90^\circ - \angle BCA)} = \dfrac{\sin\angle QGK}{\sin\angle AGQ}$.

Suy ra $\dfrac{QA}{QK} \cdot \dfrac{OI}{OA} \cdot \dfrac{PK}{PI} = 1$ hay P, O, Q thẳng hàng. □

Quay trở lại bài toán ban đầu:



Gọi AO cắt (O) tại I, PI cắt (O) tại G, (BGQ) cắt YZ tại X'.

Hai đường cao của $\triangle ABC$ là BE, CF và đường cao của $\triangle AQR$ là AT.

Áp dụng bổ đề đã chứng minh, ta có: $\angle BGQ = 90^\circ$ mà $\angle QYB = \angle BEQ = 90^\circ$.

Từ đó B, G, Q, X', Y, E đồng viên.

Ta có: $\angle X'GC = \angle X'GQ + \angle QGC = \angle X'YQ + 90^\circ - \angle BAC = \angle ZYQ + \angle AQZ = \angle AZX'$.

Suy ra tứ giác $X'ZCG$ nội tiếp, kết hợp bổ đề ta đã chứng minh thì ta có: C, G, R, X', Z, F đồng viên.

Ta có: S là trực tâm $\triangle AQR$ nên $SY \cdot SD = SZ \cdot SR$ nên S có cùng phương tích đến hai đường tròn $(X'ZR)$ và $(X'YQ)$. Suy ra S thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này hay S thuộc $X'G$.

Ta có $HE \cdot HB = HF \cdot HC$ nên H có cùng phương tích đến hai đường tròn $(X'EB)$ và $(X'CF)$. Suy ra H thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này hay H thuộc $X'G$.

Từ các nhận xét trên ta có: X' chính là X trong đề bài và $SX \cdot SG = SY \cdot SQ = ST \cdot SA$.

Suy ra tứ giác $AXTG$ nội tiếp hay $X \in (AP)$ hay $XA \perp XP$.

Bài toán 0.4. **(Lim Olympic - Nghệ An TST - P4)**

Cho số nguyên dương k lớn hơn 1. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, gọi $\sigma_k(n)$ là tổng các lũy thừa bậc k của các ước nguyên dương của n. Ta gọi n là số tốt nếu $n \mid \sigma_k(n)$.

1. Chứng minh rằng σ_k là hàm nhân tính số học và tồn tại một dãy vô hạn các số tốt
$$n_1 < n_2 < \cdots$$
thỏa mãn $n_i \mid n_{i+1}$ với mọi $i \geq 1$.
2. Chứng minh rằng với mọi $r \in \mathbb{N}^*$, tồn tại một số tốt có ít nhất r ước nguyên tố phân biệt.

Lời giải.

1. Vì $(a, b) = 1$ nên mỗi ước dương của ab biểu diễn duy nhất dưới dạng uv với $u \mid a$ và $v \mid b$. Vì thế
$$\sigma_k(ab) = \sum_{u|a} \sum_{v|b} (uv)^k = \left(\sum_{u|a} u^k \right) \left(\sum_{v|b} v^k \right) = \sigma_k(a)\sigma_k(b).$$

Ta chứng minh rằng từ mỗi số tốt $m > 1$ luôn xây dựng được một số tốt $m' > m$ sao cho $m \mid m'$.

Nếu tồn tại một số nguyên tố $q \mid \sigma_k(m)$ nhưng $q \nmid m$, đặt $m' = mq$. Do $(m, q) = 1$, ta có

$$\sigma_k(m') = \sigma_k(m)(1 + q^k).$$

Mặt khác, $m \mid \sigma_k(m)$, $q \mid \sigma_k(m)$ và $(m, q) = 1$, nên $mq \mid \sigma_k(m)$. Bởi vậy m' là số tốt.

Xét trường hợp mọi ước nguyên tố của $\sigma_k(m)$ đều là ước của m. Viết

$$m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i}, \qquad \sigma_k(m) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{b_i}.$$

Do $m \mid \sigma_k(m)$ nên $b_i \geq a_i$ với mọi i. Lại có $\sigma_k(m) > m^k$, nên tồn tại j sao cho $b_j > ka_j$. Đặt

$$m' = p_j^{a_j+1} m.$$

Ta có $v_{p_j}(m') = 2a_j + 1$ nên

$$\sigma_k(m') = \left(\sum_{h=0}^{2a_j+1} p_j^{hk}\right) \prod_{i \neq j} \sigma_k(p_i^{a_i}) = \left(1 + p_j^{(a_j+1)k}\right) \left(\sum_{h=0}^{a_j} p_j^{hk}\right) \prod_{i \neq j} \sigma_k(p_i^{a_i}) = \left(1 + p_j^{(a_j+1)k}\right) \sigma_k(m).$$

Vì $b_j \geq ka_j + 1 \geq 2a_j + 1$ và $b_i \geq a_i$ với $i \neq j$, ta có $m' \mid \sigma_k(m)$.

Suy ra $m' \mid \sigma_k(m')$, nên m' cũng là số tốt.

Bây giờ lấy một ước nguyên tố lẻ p của $2^k + 1$. Khi đó

$$\sigma_k(2p) = (1 + 2^k)(1 + p^k).$$

Ta có $p \mid 1 + 2^k$ và $2 \mid 1 + p^k$, nên $2p \mid \sigma_k(2p)$. Do đó $n_1 = 2p$ là số tốt. Áp dụng liên tiếp ta thu được dãy vô hạn các số tốt $n_1 < n_2 < \cdots$ thỏa mãn $n_i \mid n_{i+1}$.

(2) Từ ý trên, ta chỉ cần chứng minh nhận xét sau là bài toán được giải quyết:

Nhận xét. Với tập hữu hạn $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}$, chỉ có hữu hạn số tốt mà mọi ước nguyên tố đều thuộc $\mathcal{P}$.

Đầu tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 0.2.

Với hai số nguyên tố phân biệt p, q, tồn tại hằng số $C_{p,q}$ sao cho

$$v_p\big(\sigma_k(q^a)\big) \leq C_{p,q} + \log_2(a + 1), \qquad \forall a \geq 0$$

Chứng minh. Ta có $\sigma_k(q^a) = \dfrac{q^{k(a+1)} - 1}{q^k - 1}$

- ◈ Nếu p lẻ, đặt $d = \mathrm{ord}_p(q^k)$ Khi đó $d \mid p - 1$, nên $p \nmid d$.
  - ☆ Nếu $d \nmid a + 1$ thì $p \nmid q^{k(a+1)} - 1$, do đó $v_p\big(\sigma_k(q^a)\big) = 0$.
  - ☆ Nếu $d \mid a + 1$, áp dụng LTE ta có

$$v_p\left(q^{k(a+1)} - 1\right) = v_p\left(q^{kd} - 1\right) + v_p\left(\frac{a+1}{d}\right).$$

  Vì $p \nmid d$ nên $v_p\left(\dfrac{a+1}{d}\right) = v_p(a + 1) \leq \log_2(a + 1)$.

  Mặt khác, $\sigma_k(q^a) \mid q^{k(a+1)} - 1$, nên

$$v_p\big(\sigma_k(q^a)\big) \leq v_p\left(q^{kd} - 1\right) + \log_2(a + 1).$$

  trong đó $v_p(q^{kd} - 1)$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào p, q.
- ◈ Nếu $p = 2$ thì q lẻ. Nếu $a + 1$ lẻ, $\sigma_k(q^a)$ là tổng của một số lẻ các số lẻ, nên $v_2\big(\sigma_k(q^a)\big) = 0$.

Nếu $a+1$ chẵn, áp dụng LTE ta có

$$v_2\left(q^{k(a+1)}-1\right) = v_2(q^k-1)+v_2(q^k+1)+v_2(a+1)-1.$$

Vì thế

$$v_2\big(\sigma_k(q^a)\big) = v_2(q^k+1)+v_2(a+1)-1 \le v_2(q^k+1)-1+\log_2(a+1).$$

trong đó $v_2(q^k+1)-1$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào q.

Như vậy, trong mọi trường hợp đều tồn tại hằng số $C_{p,q}$ sao cho

$$v_p\big(\sigma_k(q^a)\big) \le C_{p,q}+\log_2(a+1).$$

□

Để ý ta chỉ cần xét các số tốt có cùng một tập ước nguyên tố là $\{p_1,\ldots,p_s\}\subset\mathcal{P}$ và

$$n=\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i}$$

là một số tốt. Đặt $M=\max\{a_1,\ldots,a_s\}$. Vì $\sigma_k(p_i^{a_i})\equiv 1 \pmod{p_i}$ nên $p_i\nmid\sigma_k(p_i^{a_i})$ nên

$$a_i=v_{p_i}(n)\le v_{p_i}\big(\sigma_k(n)\big)=\sum_{j\neq i} v_{p_i}\big(\sigma_k(p_j^{a_j})\big)\le\sum_{j\neq i} C_{p_i,p_j}+(s-1)\log_2(M+1).$$

Đặt $C_i=\sum_{j\neq i} C_{p_i,p_j}$ và $C=\max\{C_1,\ldots,C_s\}$. Chọn $i\in\{1,2,\ldots,s\}$ sao cho $a_i=M$, ta được

$$M\le C+(s-1)\log_2(M+1).$$

Để ý với M đủ lớn thì $C+(s-1)\log_2(M+1)<M$, do đó M bị chặn.

Vì thế các số mũ $a_1,\ldots,a_s$ chỉ có hữu hạn giá trị. Suy ra chỉ có hữu hạn số tốt mà mọi ước nguyên tố đều thuộc $\mathcal{P}$, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Chương 2

CHỌN ĐTQG NGHỆ AN 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Nghệ An TST - P5)

Cho tam giác ABC không cân ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi K là trực tâm của tam giác BIC.

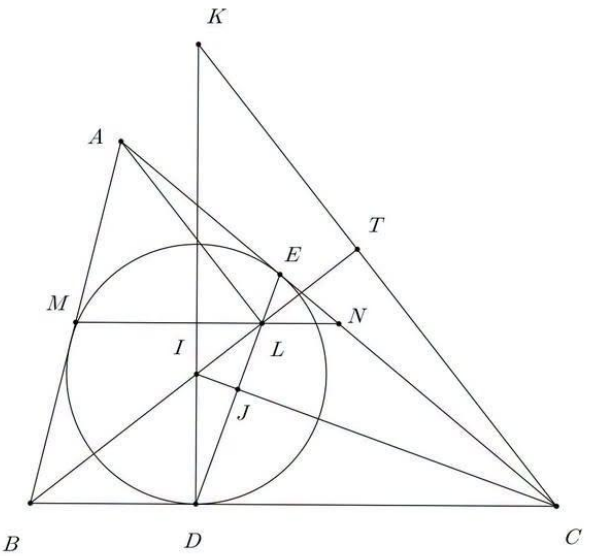
1. CK, BK lần lượt cắt DE, DF tại S, T, và ST cắt EF tại R. Chứng minh rằng $IR \perp AK$.
2. Chứng minh rằng AK, BC và đường thẳng Euler của tam giác KBC đồng quy hoặc đôi một song song.

Lời giải.

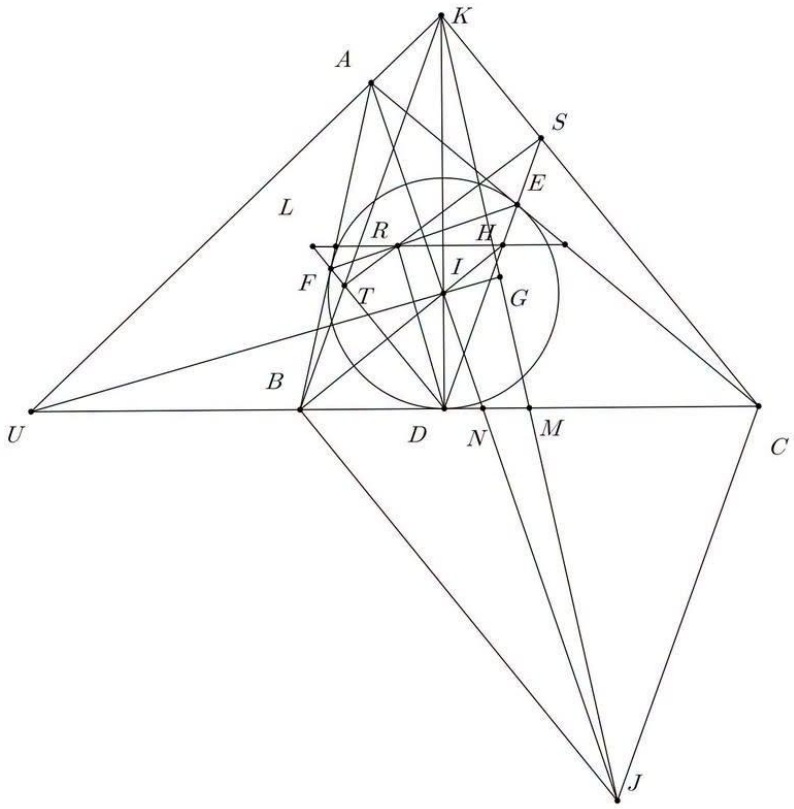
Đầu tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 0.1.

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). K là trực tâm của tam giác BIC, M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB. Chứng minh rằng MN là đường đối cực của K ứng với (I).



Chứng minh. Gọi D, E lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA. DE cắt BI, CI, KC lần lượt tại L, J, T.
Theo kết quả quen thuộc, $\angle BLA = 90^\circ$. Suy ra $ML = MA = MB$. Từ đó $\angle MLB = \angle MBL = \angle LBC$, suy ra $ML // BC$ hay $L \in MN$.
Mặt khác, do $\angle LTC = \angle LJC = 90^\circ$ nên $\overline{IL} \cdot \overline{IT} = \overline{IJ} \cdot \overline{IC} = r^2$, suy ra L và T nghịch đảo qua (I).
Xét cực và đối cực ứng với (I), ta thu được $KC \equiv d_L$.
Từ đó $K \in d_L$, suy ra $L \in d_K$. Mà $L \in MN$, $MN \perp IK$ nên $MN \equiv d_K$. □



Cách 1.

1. Áp dụng bổ đề, gọi đường trung bình đỉnh A cắt DE, DF lần lượt tại H, L.

   Do $DE \equiv d_C$ và $HL \equiv d_K$ nên $CK \equiv d_H$ mà DE cắt CK tại $S \Rightarrow (SHED) = -1$. Tương tự ta cũng có $(LTFD) = -1 \Rightarrow (DESH) = (DFTL) \Rightarrow EF, ST, HL$ đồng quy tại R. Mà $EF \equiv d_A$, $HL \equiv d_K \Rightarrow AK \equiv d_R \Rightarrow IR \perp AK$.

2. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp ΔABC, AI cắt BC tại $N \Rightarrow BKCJ$ là hình bình hành

   $\Rightarrow M$ là trung điểm KJ.

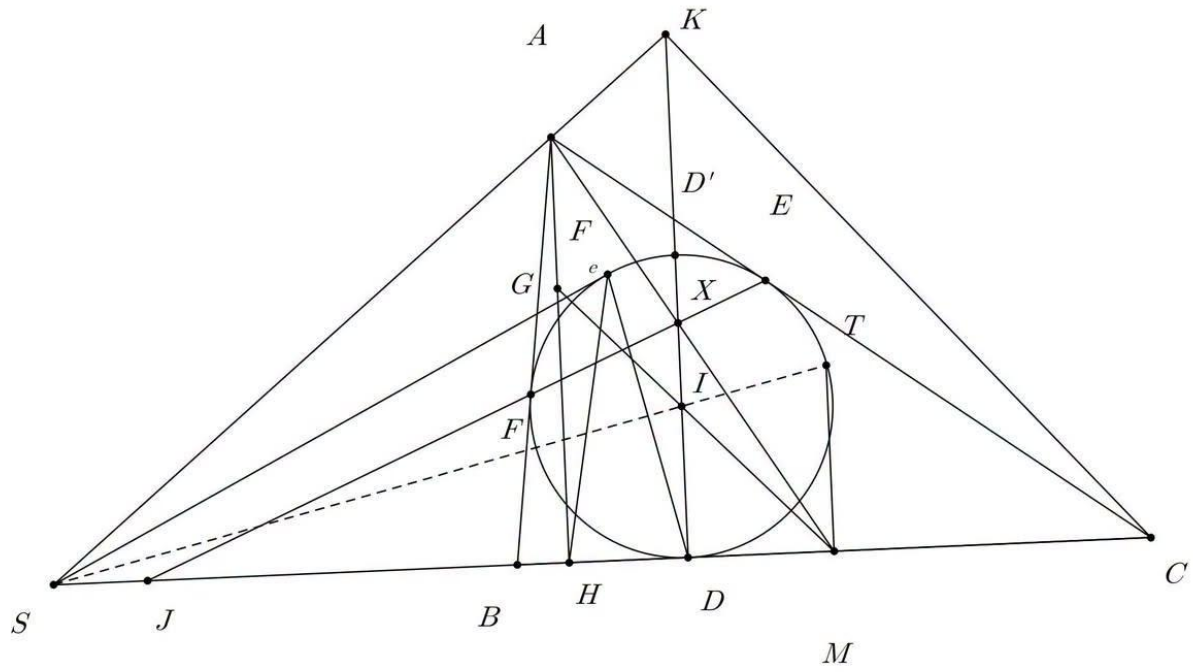
   Và $\dfrac{IA}{IN} = \dfrac{JA}{JN} \Rightarrow IA \cdot JN = JA \cdot IN \Rightarrow AN \cdot IJ = (AI+IN)(IN+NJ) = 2AI \cdot NJ \Rightarrow \dfrac{NA}{NJ} = \dfrac{2AI}{IJ}$.

   Gọi G là trọng tâm $\Delta KBC \Rightarrow \dfrac{GJ}{GK} = 2$ (do $MJ = MK$).

   Trường hợp 1: $AK // BC \Rightarrow MN // AK \Rightarrow N$ là trung điểm $AJ \Rightarrow \dfrac{IA}{IJ} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{GK}{GJ} \Rightarrow IG // AK // BC$.

   Trường hợp 2: AK cắt BC tại U. Áp dụng định lí Menelaus cho ΔAKJ với M, N, U thẳng hàng

   $\Rightarrow \dfrac{UA}{UK} \cdot \dfrac{NJ}{NA} \cdot \dfrac{MK}{MJ} = 1 \Rightarrow \dfrac{UA}{UK} = \dfrac{NJ}{AJ} \Rightarrow \dfrac{UA}{UK} \cdot \dfrac{IJ}{IA} \cdot \dfrac{GK}{GJ} = 1 \Rightarrow I, U, G$ thẳng hàng theo định lí Menelaus đảo ΔAKJ.



Cách 2. (Lời giải ý 2 không sử dụng ý 1)

Trường hợp $AK \| BC$ các bạn chứng minh tương tự cách 1.

Ta xét trường hợp AK cắt BC. Ta có một số kết quả quen thuộc liên quan tới điểm **Feuerbach**:

Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). F_e là điểm *Feuerbach*. (I) tiếp xúc BC tại D. M là trung điểm BC. H là hình chiếu của A lên BC.

1. F_eD là phân giác góc HF_eM.
2. N, P lần lượt là trung điểm AC, AB. Khi đó: PN, DF_e, EF đồng quy.

Quay trở lại bài toán: Ta có kết quả quen thuộc: K là đối cực của đường trung bình ứng với BC của tam giác ABC dẫn đến: AK, BC cắt nhau tại S thuộc tiếp tuyến từ F_e của (I). Gọi T là tâm (BKC). M là trung điểm BC và H là hình chiếu của A lên BC.

Yêu cầu bài toán tương đương: I, T, S thẳng hàng.

Ta cần có: $\dfrac{ID}{TM} = \dfrac{SD}{SM}$.

Theo hệ thức *Newton* thì ta thu được: $\overline{SH}.\overline{SM} = SD^2$ suy ra:

$\dfrac{\overline{SD}}{\overline{SM}} = \dfrac{\overline{SH}}{\overline{SD}} = \dfrac{\overline{SD} - \overline{SH}}{\overline{SM} - \overline{SD}} = -\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DM}}$.

Lại có: $\dfrac{ID}{TM} = \dfrac{2ID}{IK}$.

Ta cần chứng minh rằng: $\dfrac{2ID}{IK} = \dfrac{DH}{DM}$.

Gọi MI cắt AH tại G. D' đối xứng D qua I.

Ta có tính chất quen thuộc: $MI \| AD'$ và AM, EF, DI đồng quy tại X.

Theo định lí *Thales* ta có: $\dfrac{DH}{DM} = \dfrac{IG}{IM} = \dfrac{AD'}{IM} = \dfrac{XD'}{XI}$.

Gọi EF cắt BC tại J, ta có: $(JD, BC) = -1$ dẫn đến chiếu xuyên tâm B ta được: $(KI, XD) = -1$. Theo hệ thức *Maclaurin* ta có: $XI.XK = XD'.XD$ suy ra: $\dfrac{XD'}{XI} = \dfrac{XK}{XD} = \dfrac{2ID}{IK}$.

Do đó ta thu được điều cần chứng minh.

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Nghệ An TST - P6)

Cho đa thức monic

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

với $n > 2$, hệ số thực, tất cả nghiệm của $P(x)$ đều là số thực và khác 0.

1. Chứng minh rằng $2026a_k^2 + 2027a_{k+1}^2 > 0$ với mọi $k = 0, 1, \ldots, n-2$.
2. Hỏi số lượng hệ số khác 0 của đa thức $P(x)$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 0.2.

Giả sử $Q(x) = \sum_{i=0}^{d} b_i x^i$ là đa thức bậc $d \geq 2$ và có d nghiệm thực, kể cả bội.

Nếu tồn tại $t \in \{0, 1, \ldots, d-2\}$ sao cho $b_t = b_{t+1} = 0$ thì $b_0 = b_1 = \cdots = b_{t+1} = 0$.

Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề bằng quy nạp theo d. Với $d = 2$, hiển nhiên.

Giả sử bổ đề đúng với các đa thức bậc $d-1$. Xét đa thức Q bậc d. Trường hợp $t = 0$ là hiển nhiên. Xét $1 \leq t \leq d-2$ và viết $Q'(x) = \sum_{j=0}^{d-1} c_j x^j$, trong đó $c_j = (j+1)b_{j+1}$. Theo định lý Rolle, Q' có $d-1$ nghiệm thực. Hơn nữa, $c_{t-1} = tb_t = 0$ và $c_t = (t+1)b_{t+1} = 0$. Do $t - 1 \leq d - 3$, giả thiết quy nạp áp dụng được cho Q', suy ra $c_0 = c_1 = \cdots = c_t = 0$, hay $b_1 = b_2 = \cdots = b_{t+1} = 0$.

Giờ ta cần chứng minh $b_0 = 0$. Giả sử ngược lại rằng $b_0 \neq 0$ và gọi $r_1, r_2, \ldots, r_d$ là các nghiệm thực của Q. Khi đó mọi r_i đều khác 0. Vì $b_1 = b_2 = 0$, theo định lý Viète,

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{r_i} = -\frac{b_1}{b_0} = 0, \qquad \sum_{1 \leq i < j \leq d} \frac{1}{r_i r_j} = \frac{b_2}{b_0} = 0.$$

Do đó $\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{r_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{r_i}\right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} \frac{1}{r_i r_j} = 0$, vô lý vì r_i là số thực khác 0.

Vậy $b_0 = 0$ và bổ đề được chứng minh. □

1. Giả sử tồn tại $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ sao cho $a_k = a_{k+1} = 0$. Áp dụng bổ đề cho $Q = P$ và $t = k$, ta được $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k+1} = 0$. Đặc biệt, $a_0 = 0$, nên $P(0) = 0$, trái với giả thiết mọi nghiệm của P đều khác 0. Vậy a_k, a_{k+1} không thể đồng thời bằng 0, từ đó có điều phải chứng minh.
2. Ta có $a_0 \neq 0$ vì P không có nghiệm 0, còn hệ số cao nhất bằng 1. Theo ý 1, trong hai hệ số liên tiếp a_k, a_{k+1} luôn có ít nhất một hệ số khác 0.
   - Nếu $n = 2m$, xét $m-1$ cặp $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \ldots, (a_{2m-3}, a_{2m-2})$. Mỗi cặp có ít nhất một hệ số khác 0; cùng với a_0 và $a_{2m} = 1$, đa thức có ít nhất $m+1$ hệ số khác 0.
   - Nếu $n = 2m+1$, xét m cặp $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \ldots, (a_{2m-1}, a_{2m})$. Cùng với a_0 và $a_{2m+1} = 1$, đa thức có ít nhất $m+2$ hệ số khác 0.

   Ta chứng minh các cận này đều đạt được.
   - Với $n = 2m$, lấy $P(x) = (x^2 - 1)^m$. Đa thức này có đúng $m+1$ hệ số khác 0.
   - Với $n = 2m+1$, xét $Q(x) = x \prod_{j=1}^{m} (x^2 - j^2)$ có các hệ số của $x^{2m+1}, x^{2m-1}, \ldots, x$ đều khác 0,

nên đa thức Q có đúng $m+1$ hệ số khác 0.

Chọn quanh mỗi nghiệm của Q một khoảng nhỏ, sao cho các khoảng đôi một rời nhau và giá trị của Q tại hai đầu mỗi khoảng trái dấu. Vì chỉ có hữu hạn đầu mút, tồn tại $\varepsilon \neq 0$ đủ nhỏ để $Q(x)+\varepsilon$ vẫn trái dấu tại hai đầu của từng khoảng. Theo định lý giá trị trung gian, đa thức $P_\varepsilon(x) = Q(x)+\varepsilon$ có một nghiệm trong mỗi khoảng. Nó có bậc $2m+1$, nên tất cả các nghiệm đều thực; đồng thời $P_\varepsilon(0) = \varepsilon \neq 0$, nên không nghiệm nào bằng 0.

Đa thức P_ε này có đúng $m+2$ hệ số khác 0.

Vậy số lượng hệ số khác 0 nhỏ nhất là $\boxed{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}$

Bài toán 0.7. **(Lim Olympic - Nghệ An TST - P7)**

Cho hai số nguyên n, k thỏa mãn $2 \leq k < n$. Trong một lễ hội, có n ngọn đèn được đặt trên một vòng tròn và đánh số $1, 2, \ldots, n$ theo chiều kim đồng hồ. Mỗi ngọn đèn ở một trong hai trạng thái: sáng hoặc tắt.

Trong mỗi lượt ghi, trạng thái của các ngọn đèn được giữ cố định. Một người đi quanh vòng tròn theo chiều kim đồng hồ. Khi đứng tại ngọn đèn thứ i, người đó ghi lại số ngọn đèn đang sáng trong k ngọn đèn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ ngọn đèn thứ i; sau ngọn đèn thứ n lại đến ngọn đèn thứ 1. Gọi số ghi được tại ngọn đèn thứ i là s_i. Sau một vòng, người đó thu được bản ghi $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

1. Xác định điều kiện của n, k để với mọi cách bố trí trạng thái của các ngọn đèn, bản ghi $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ xác định duy nhất cách bố trí đó.
2. Trong suốt lễ hội, trạng thái của các ngọn đèn có thể được thay đổi tùy ý giữa các lượt ghi. Xác định số bản ghi $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ phân biệt có thể thu được.

Lời giải.

Quy ước các chỉ số theo modulo n. Với mỗi cách bố trí $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, đặt $x_i = 1$ nếu đèn thứ i sáng và $x_i = 0$ nếu đèn thứ i tắt. Khi đó $s_i = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+k-1}$.

1. Ta chứng minh điều kiện cần và đủ là $\gcd(n, k) = 1$.

   Trước hết, giả sử $d = \gcd(n, k) > 1$. Xét cấu hình x trong đó đúng các đèn có chỉ số đồng dư 1 modulo d sáng, và cấu hình y trong đó đúng các đèn có chỉ số đồng dư 2 modulo d sáng. Trong k vị trí liên tiếp, mỗi lớp đồng dư modulo d xuất hiện đúng k/d lần. Vì thế cả hai cấu hình đều cho $s_i = k/d$ với mọi i. Hai cấu hình khác nhau nhưng có cùng bản ghi, nên ta loại trường hợp này.

   Ngược lại, giả sử $\gcd(n, k) = 1$. Từ bản ghi, ta có $s_{i+1} - s_i = x_{i+k} - x_i$. Do $\gcd(n, k) = 1$, dãy chỉ số $1, 1+k, 1+2k, \ldots, 1+(n-1)k$ modulo n đi qua tất cả các vị trí. Bắt đầu từ x_1 và dùng liên tiếp các đẳng thức trên, ta biểu diễn được $x_i = x_1 + C_i$ với mọi i, trong đó mỗi C_i hoàn toàn được xác định bởi bản ghi.

   Thay vào $s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, ta được $kx_1 + C = s_1$, trong đó $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$ đã biết. Vì $k > 0$, giá trị x_1 được xác định duy nhất nên $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cũng được xác định duy nhất.

   Vậy điều kiện cần và đủ là $\boxed{\gcd(n, k) = 1}$

2. Đặt $d = \gcd(n, k)$, viết $n = dm$ và $k = dq$. Xét hai cấu hình x, y và đặt $c_i = x_i - y_i$. Hai cấu hình cho cùng bản ghi khi và chỉ khi $c_i + c_{i+1} + \cdots + c_{i+k-1} = 0$ với mọi i. Trừ hai đẳng thức liên tiếp, ta được $c_{i+k} = c_i$ với mọi i. Do đó c_i không đổi trên mỗi lớp đồng dư modulo d.

Gọi giá trị của hiệu trên lớp thứ r là c_r. Vì mỗi đoạn gồm $k = dq$ vị trí liên tiếp chứa đúng q phần tử thuộc mỗi lớp đồng dư modulo d, điều kiện tổng bằng 0 tương đương với $c_1 + c_2 + \cdots + c_d = 0$.

Ngược lại, điều kiện này cùng với việc hiệu không đổi trên mỗi lớp đồng dư cũng cho ta điều kiện đủ để hai cấu hình cho cùng bản ghi.

Giờ ta chia các ngọn đèn thành d **đường ray**.

Với $1 \le r \le d$, đặt $X_r = (x_r, x_{r+d}, \ldots, x_{r+(m-1)d}) \in \{0,1\}^m$ là đường ray thứ r. Nếu một đường ray của x chứa cả 0 và 1 thì bắt buộc $c_r = 0$, nên đường ray đó được giữ nguyên trong y. Một đường ray toàn 1 chỉ có thể được giữ nguyên hoặc đổi thành toàn 0; tương tự, một đường ray toàn 0 chỉ có thể được giữ nguyên hoặc đổi thành toàn 1.

Với mỗi cấu hình $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gọi

$$\phi(x) = \left\{ y \in \{0,1\}^n : y \text{ cho cùng bản ghi với } x \right\}.$$

Như vậy, $\phi(x)$ là lớp gồm tất cả các cấu hình cho cùng một bản ghi với x, còn $|\phi(x)|$ là số cấu hình thuộc lớp đó. Giả sử x có đúng u đường ray toàn 1, v đường ray toàn 0 và $d-u-v$ đường ray hỗn hợp (tức có cả 0 và 1). Để thu được một cấu hình $y \in \phi(x)$, ta chọn j trong u đường ray toàn 1 để đổi thành toàn 0, đồng thời chọn đúng j trong v đường ray toàn 0 để đổi thành toàn 1. Các đường ray còn lại được giữ nguyên. Do đó theo Vandermonde ta có

$$|\phi(x)| = \sum_{j=0}^{\min(u,v)} C_u^j C_v^j = C_{u+v}^u,$$

Ta gán cho mỗi cấu hình x trọng số $\dfrac{1}{|\phi(x)|}$. Xét một lớp $\mathcal{L}$ có đúng h cấu hình. Với mọi $x \in \mathcal{L}$, ta có $\phi(x) = \mathcal{L}$, nên $|\phi(x)| = h$. Vì thế tổng trọng số của các cấu hình thuộc $\mathcal{L}$ bằng

$$\sum_{x \in \mathcal{L}} \frac{1}{|\phi(x)|} = h \cdot \frac{1}{h} = 1.$$

Do đó, khi cộng trên tất cả các cấu hình, mỗi lớp tương đương, hay mỗi bản ghi phân biệt, được tính đúng một lần. Bởi vậy $T = \displaystyle\sum_{x \in \{0,1\}^n} \frac{1}{|\phi(x)|}$ là số bản ghi cần tính.

Số cấu hình x đúng u đường ray toàn 1 và v đường ray toàn 0 là $\dfrac{d!}{u!v!(d-u-v)!}(2^m-2)^{d-u-v}$ nên

$$T = \sum_{\substack{u,v \ge 0 \\ u+v \le d}} \frac{d!}{u!v!(d-u-v)!}(2^m-2)^{d-u-v} \frac{u!v!}{(u+v)!} = \sum_{u+v=0}^{d} C_d^{u+v}(u+v+1)(2^m-2)^{d-u-v}$$

Kết hợp với việc $(u+v)C_d^{u+v} = dC_{d-1}^{u+v-1}$ ta suy ra được

$$T = (2^m-1)^d + d(2^m-1)^{d-1} = (2^m+d-1)(2^m-1)^{d-1},$$

trong đó $d = \gcd(n,k)$ và $m = n/d$.

Vậy số bản ghi phân biệt có thể thu được là $\boxed{\boldsymbol{T = (2^{n/d} + d - 1)(2^{n/d} - 1)^{d-1}}}$ với $d = \gcd(n,k)$.