SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
NĂM HỌC 2026 - 2027

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian phát đề*)
Ngày thi thứ nhất: ***15/9/2026***
Đề thi gồm 04 bài, trong 01 trang

Bài 1. *(5,0 điểm)* Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \left(n^2+1\right).x_1x_2...x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$.

a) Chứng minh rằng $x_n \geq 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ là một số vô tỉ.

Bài 2. *(5,0 điểm)* Cho n là một số nguyên dương lẻ. Xét các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)f(y+x) = x^n f(f(y)) + \left(f(x)\right)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1).

a) Giả sử f không là hàm hằng. Chứng minh rằng:

i) $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

ii) f là một đơn ánh.

b) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn (1).

Bài 3. *(5,0 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có đường cao AH. Gọi X, Y là hai điểm phân biệt thay đổi trên cạnh BC sao cho $\widehat{CAX} = \widehat{BAY}$; K, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của B lên AX, AY; T, L tương ứng là hình chiếu vuông góc của C lên AX, AY.

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AH, TL, SK đồng quy.

b) Chứng minh rằng giao điểm của KL và ST thuộc một đường thẳng cố định khi X, Y thay đổi trên cạnh BC.

Bài 4. *(5,0 điểm)* Cho các số nguyên dương m, n. Xét một bảng ô vuông kích thước $3m \times 6n$ (gồm $3m$ hàng và $6n$ cột). Trên bảng đó một số ô có màu trắng và các ô còn lại màu đỏ. Gọi T là số bộ ba (C_1, C_2, C_3) gồm các ô, trong đó hai ô đầu tiên nằm trên cùng một hàng và hai ô cuối cùng nằm trên cùng một cột, với C_1 và C_3 là ô trắng còn C_2 là ô đỏ. Tìm giá trị lớn nhất của T.

----------**HẾT**----------

** Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu;*

** Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
NĂM HỌC 2026 - 2027

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian phát đề*)
Ngày thi thứ hai: ***16/9/2026***
Đề thi gồm 03 bài, trong 01 trang

Bài 5. *(6,0 điểm)*

Cho số nguyên dương n. Xét các số thực $x_1, x_2, ...x_n$ thoả mãn $|x_i| \le 1, \forall i = 1,2,...,n;$ và $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. Với mỗi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, đặt $S_k = x_1 + 2x_2 + ... + kx_k$.

a) Chứng minh rằng tồn tại các số $p, q \in \{1,2,...,n\}$ (không nhất thiết phân biệt) sao cho $S_p \le 0$ và $|S_q| \le \frac{2q+1}{4}$.

b) Khi $n \ge 3$, chứng minh rằng tồn tại các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán sao cho với mọi $k \in \{1,2,...,n\}$ ta đều có $|S_k| \ge \frac{2k+1}{4}$.

Bài 6. *(7,0 điểm)*

a) Với mỗi số nguyên dương n, gọi $\sigma(n)$ là tổng các ước dương của n. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho n là ước của $2^{\sigma(n)} - 1$.

b) Cho dãy số nguyên dương $(a_n)_{n \ge 1}$ và dãy các số nguyên tố $(p_n)_{n \ge 1}$ thoả mãn với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $p_n | a_n$ và $a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}\left(p_n^{1013} - 1\right)$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho a_m chia hết cho 2026.

Bài 7. *(7,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O), có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Các đoạn thẳng AG, BG, CG theo thứ tự cắt đường tròn (DEF) tại I, J, K. Các đường tròn (AID), (BJE), (CKF) cắt lại đường tròn (O) tại các điểm thứ hai tương ứng là X, Y, Z.

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm trên đường thẳng OH.

b) Đường thẳng AC cắt đường tròn (AHB) tại điểm thứ hai là N; đường thẳng AB cắt đường tròn (AHC) tại điểm thứ hai là M. Đường tròn (HMN) cắt lại các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai tương ứng là S, T. Chứng minh ST vuông góc với OH.

----------**HẾT**----------

* *Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu;*

* *Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

Chương 1

CHỌN ĐTQG NINH BÌNH 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Ninh Bình TST - P1)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = (n^2+1)x_1x_2\cdots x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_n = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}$.

1. Chứng minh rằng $x_n \geq 2^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.
2. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ là một số vô tỉ.

Lời giải.

(Lời giải của bạn Trí Dũng)

1. Vì $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = (n^2+1)x_1x_2\cdots x_n \geq 2x_n$, nên bằng quy nạp, $x_n \geq 2^{n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

   Do đó $0 < y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} < 2.$

   Dễ thấy rằng (y_n) tăng và bị chặn trên. Vì vậy (y_n) có giới hạn hữu hạn.

2. Đặt $L = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Giả sử $L = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}^*$.

   Vì $x_n = \big((n-1)^2+1\big)x_1x_2\cdots x_{n-1}$, nên $x_i \mid x_n$ với mọi $i \leq n$, suy ra $x_ny_n \in \mathbb{Z}$.

   Bởi vậy $A_n := bx_n(L - y_n) = ax_n - bx_ny_n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

   Lại có $x_{m+1} \geq 2x_m$, nên $x_{n+j} \geq 2^{j-1}x_{n+1}$ với mọi $j \geq 1$.

   Do đó $0 < L - y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x_{n+j}} \leq \frac{1}{x_{n+1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{2}{x_{n+1}}.$

   Suy ra $0 < A_n \leq \dfrac{2bx_n}{x_{n+1}} = \dfrac{2b}{(n^2+1)x_1x_2\cdots x_{n-1}} \leq \dfrac{2b}{n^2+1} < 1$ khi n đủ lớn.

   Từ đó ta có mâu thuẫn với $A_n \in \mathbb{Z}_{>0}$, vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \notin \mathbb{Q}$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Ninh Bình TST - P2)

Cho n là một số nguyên dương lẻ. Xét các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y+x) = x^n f(f(y)) + (f(x))^2, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Giả sử f không là hàm hằng. Chứng minh rằng:
   - **a)** $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;
   - **b)** f là một đơn ánh.
2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn (1).

Lời giải.

(Lời giải của bạn Trí Dũng)

Kí hiệu mệnh đề $P(x,y)$: $f(x)f(x+y)=x^nf(f(y))+f(x)^2$.

Trước hết, nếu $f\equiv c$ là hàm hằng thì từ $P(x,y)$ ta có $c^2=x^nc+c^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, suy ra $c=0$.

Vậy $f\equiv 0$ là một nghiệm. Sau đây ta sẽ giả sử f không hằng.

1 **a)** Từ $P(0,y)$, ta có $f(0)f(y)=f(0)^2$ với mọi $y\in\mathbb{R}$.

Vì f không hằng nên suy ra $f(0)=0$.

Giả sử tồn tại $a\neq 0$ sao cho $f(a)=0$.

Khi đó từ $P(a,y)$, $a^nf(f(y))=0$ với mọi y, nên $f(f(y))=0$ với mọi $y\in\mathbb{R}$.

Vì f không hằng nên tồn tại c sao cho $f(c)\neq 0$. Từ $P(c,y)$, ta được $f(c)f(c+y)=f(c)^2$, hay $f(c+y)=f(c)$ với mọi $y\in\mathbb{R}$, mâu thuẫn với giả thiết f không hằng.

Vậy $f(x)=0\iff x=0$.

b) Giả sử $f(a)=f(b)$. Lấy $P(x,a)-P(x,b)$, ta được $f(x)\big(f(x+a)-f(x+b)\big)=0$.

Theo câu trên, với mọi $x\neq 0$ ta có $f(x)\neq 0$, nên $f(x+a)=f(x+b)$.

Với $x=0$ thì đẳng thức trên cũng đúng do $f(a)=f(b)$.

Vì vậy $f(x+a)=f(x+b)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó $b-a$ là một chu kì của f, suy ra $f(b-a)=f(0)=0$.

Theo câu trên, $b-a=0$, tức là $a=b$. Vậy f là đơn ánh.

2 Với $x\neq 0$, từ $P(x,-x)$ và $P(-x,x)$, do n lẻ, ta có

$$f(f(-x))=-\frac{f(x)^2}{x^n},\qquad f(f(x))=\frac{f(-x)^2}{x^n}. \tag{2}$$

Mặt khác, từ $P(x,x)$ và $P(-x,-x)$, kết hợp với (2), ta được

$$f(x)f(2x)=f(x)^2+f(-x)^2,$$

$$f(-x)f(-2x)=f(x)^2+f(-x)^2. \tag{3}$$

Từ $P(x,-2x)$ và $P(-x,2x)$, kết hợp với (2), ta có

$$f(x)\big(f(x)-f(-x)\big)=\frac{f(2x)^2}{2^n},$$

$$f(-x)\big(f(-x)-f(x)\big)=\frac{f(-2x)^2}{2^n}. \tag{4}$$

Vì $x\neq 0$ nên $f(x),f(-x),f(2x),f(-2x)$ đều khác 0. Chia hai đẳng thức trong (4), ta được

$$-\frac{f(x)}{f(-x)}=\frac{f(2x)^2}{f(-2x)^2}. \tag{5}$$

Từ (3) ta có $\dfrac{f(2x)}{f(-2x)}=\dfrac{f(-x)}{f(x)}$ và thay vào (5), ta được $-\dfrac{f(x)}{f(-x)}=\dfrac{f(-x)^2}{f(x)^2}$ suy ra $f(-x)^3=-f(x)^3$.

Do đó $f(-x)=-f(x)$ với mọi $x\neq 0$.

Đẳng thức cũng đúng với $x=0$, nên f là hàm lẻ. Từ (2), suy ra với mọi $x\neq 0$,

$$f(f(x))=\frac{f(x)^2}{x^n}. \tag{6}$$

Với $x,y\neq 0$, từ $P(x,y)$ và (6), ta được

$$f(x+y)=f(x)+\frac{x^nf(y)^2}{y^nf(x)}. \tag{7}$$

Đổi vai trò x, y trong (7) rồi so sánh hai biểu thức của $f(x+y)$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{x^n} - \frac{f(y)}{y^n}\right)\left(\frac{f(x)^2}{x^n} + \frac{f(y)^2}{y^n}\right) = 0. \tag{8}$$

Với $x, y > 0$, thừa số thứ hai trong (8) dương, nên $\dfrac{f(x)}{x^n} = \dfrac{f(y)}{y^n}$.

Lấy $y = 1$ và đặt $c = f(1) \neq 0$, ta được $f(x) = cx^n$ với mọi $x > 0$.

Vì f là hàm lẻ và n lẻ nên

$$f(x) = cx^n, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Thay (9) vào phương trình ban đầu, với $x, y \neq 0$, rồi rút gọn, ta được

$$(x+y)^n = x^n + c^{n-1}y^{n^2}. \tag{10}$$

Nếu $n > 1$, cho $y = 1$ trong (10), ta có $(x+1)^n - x^n = c^{n-1}$ với mọi $x \neq 0$. Vế trái không thể là một hằng số khi $n > 1$, chẳng hạn, lần lượt lấy $x = 1$ và $x = -1$, ta được

$$2^n - 1 = c^{n-1}, \qquad -(-1)^n = c^{n-1}.$$

Vì n lẻ nên đẳng thức thứ hai cho $c^{n-1} = 1$, trong khi đẳng thức thứ nhất cho $c^{n-1} = 2^n - 1 > 1$, mâu thuẫn. Vậy với $n \geq 3$ lẻ, không tồn tại nghiệm không hằng. Do đó chỉ có nghiệm $f \equiv 0$.

Nếu $n = 1$, trực tiếp kiểm tra thấy $f(x) = cx$ thỏa mãn phương trình với mọi $c \in \mathbb{R}$.

Vậy tất cả các nghiệm cần tìm là $\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = cx,} & \boldsymbol{c \in \mathbb{R},} \quad \boldsymbol{n = 1,} \\ \boldsymbol{f(x) = 0,} & \boldsymbol{n \geq 3} \text{ lẻ.} \end{cases}$

Bài toán 0.3. **(Lim Olympic - Ninh Bình TST - P3)**

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có đường cao AH. Gọi X, Y là hai điểm phân biệt thay đổi trên cạnh BC sao cho $\widehat{CAX} = \widehat{BAY}$; K, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của B lên AX, AY; T, L tương ứng là hình chiếu vuông góc của C lên AX, AY.

1. Chứng minh rằng ba đường thẳng AH, TL, SK đồng quy.
2. Chứng minh rằng giao điểm của KL và ST thuộc một đường thẳng cố định khi X, Y thay đổi trên cạnh BC.

Lời giải.

1. Ta có $AK \cdot AT = (AB \cdot \cos BAK) \cdot (AC \cdot \cos TAC)$ và $AS \cdot AL = (AB \cdot \cos BAS) \cdot (AC \cdot \cos CAL)$.

   $\Rightarrow AK \cdot AT = AS \cdot AL \Rightarrow STKL$ nội tiếp

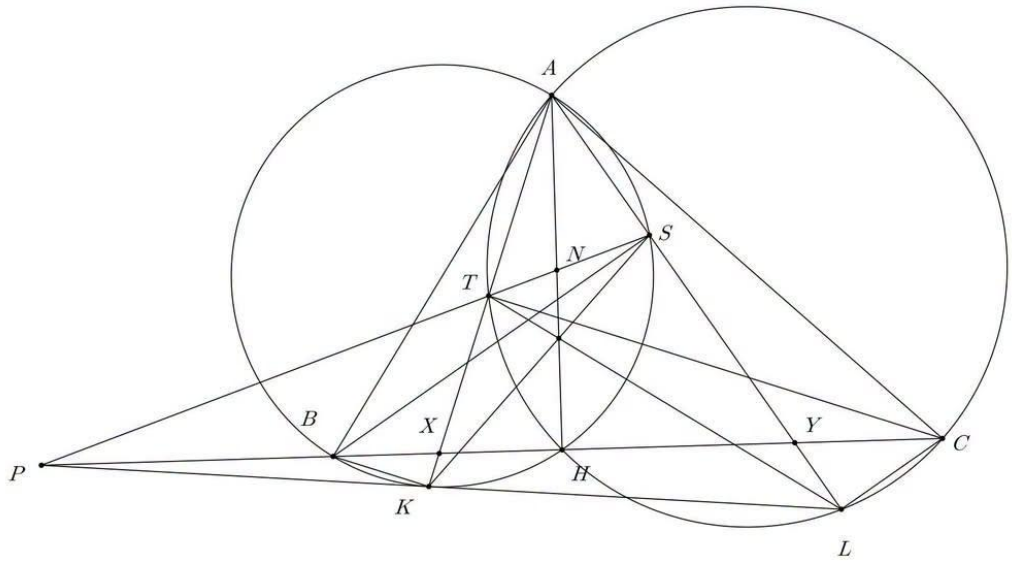
   $\Rightarrow AH, TL, SK$ đồng quy tại tâm đẳng phương của $(STKL)$, (AB), (AC).

2. Ta có $\angle AHS = \angle AKS = \angle ALT = \angle AHT \Rightarrow HA$ là phân giác $\angle THS$.

   Gọi AH cắt TS tại N, TS cắt BC tại $P \Rightarrow H(NPTS) = -1 \Rightarrow (NPTS) = -1$.

   Gọi TS cắt KL tại $P' \Rightarrow (P'NTS) = -1$ theo hàng điểm tứ giác toàn phần,

   $\Rightarrow (PNTS) = (P'NTS) \Rightarrow P'$ trùng P hay KL cắt ST trên BC cố định.



Bài toán 0.4. **(Lim Olympic - Ninh Bình TST - P4)**

Cho các số nguyên dương m, n. Xét một bảng ô vuông kích thước $3m \times 6n$ (gồm $3m$ hàng và $6n$ cột). Trên bảng đó một số ô có màu trắng và các ô còn lại màu đỏ. Gọi T là số bộ ba (C_1, C_2, C_3) gồm các ô, trong đó hai ô đầu tiên nằm trên cùng một hàng và hai ô cuối cùng nằm trên cùng một cột, với C_1, C_3 là ô trắng còn C_2 là ô đỏ. Tìm giá trị lớn nhất của T.

Lời giải.

Đặt $R = 3m$, $C = 6n$. Gọi w_i là số ô trắng ở hàng i và v_j là số ô trắng ở cột j.

Với mỗi ô đỏ (i, j) được chọn làm C_2, có đúng w_i cách chọn C_1 và v_j cách chọn C_3. Vì thế

$$T = \sum_{(i,j) \text{ đỏ}} w_i v_j.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$T^2 \le \left(\sum_{(i,j) \text{ đỏ}} w_i^2 \right) \left(\sum_{(i,j) \text{ đỏ}} v_j^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^{R} (C - w_i) w_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{C} (R - v_j) v_j^2 \right).$$

Với $0 \le u \le C$ thì $(C-u)u^2 \le \dfrac{4C^3}{27}$ và $(R-v)v^2 \le \dfrac{4R^3}{27}$, do đó

$$T \le \sqrt{R \cdot \frac{4C^3}{27} \, C \cdot \frac{4R^3}{27}} = \frac{4}{27} R^2 C^2 = 48m^2n^2.$$

Để đạt dấu bằng, chia $3m$ hàng thành ba nhóm, mỗi nhóm m hàng; chia $6n$ cột thành ba nhóm, mỗi nhóm $2n$ cột. Tô đỏ ba khối nằm trên đường chéo tạo bởi các cặp nhóm cùng chỉ số và tô trắng các ô còn lại. Khi đó mỗi hàng có $2n$ ô đỏ, $4n$ ô trắng; mỗi cột có m ô đỏ, $2m$ ô trắng. Có $6mn$ ô đỏ và mỗi ô đỏ đóng góp $(4n)(2m) = 8mn$ bộ ba. Bởi vậy $T = 6mn \cdot 8mn = 48m^2n^2$.

Do đó giá trị lớn nhất cần tìm là $\boxed{\mathbf{48m^2n^2}}$

CHỌN ĐTQG NINH BÌNH 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. **(Lim Olympic - Ninh Bình TST - P5)**

Cho số nguyên dương n. Xét các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn $|x_i| \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ và $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Với mỗi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, đặt $S_k = x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k$.

(1) Chứng minh rằng tồn tại các số $p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (không nhất thiết phân biệt) sao cho

$$S_p \leq 0 \qquad \text{và} \qquad |S_q| \leq \frac{2q+1}{4}.$$

(2) Khi $n \geq 3$, chứng minh rằng tồn tại các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán sao cho với mọi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ta đều có

$$|S_k| \geq \frac{2k+1}{4}.$$

Lời giải.

Đặt thêm $S_0 = 0$.

(1) Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$, từ $S_k - S_{k-1} = kx_k$ ta có $x_k = \dfrac{S_k - S_{k-1}}{k}$.

Do đó $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \frac{S_n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k(k+1)}$.

Theo giả thiết $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$, suy ra $\dfrac{S_n}{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k(k+1)} = 0$.

Các hệ số trong vế trái đều dương, vì vậy không thể có $S_k > 0$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Suy ra tồn tại $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $S_p \leq 0$.

Bây giờ ta chứng minh tồn tại q thỏa mãn $|S_q| \leq \dfrac{2q+1}{4}$.

Nếu $S_1 = 0$ thì chỉ cần chọn $q = 1$. Nếu $S_1 \neq 0$, do việc thay đồng thời x_i bởi $-x_i$ không làm thay đổi các số $|S_k|$, ta có thể giả sử $S_1 = x_1 > 0$.

Từ kết quả vừa chứng minh, tồn tại một chỉ số $k \geq 2$ sao cho $S_k \leq 0$.

Chọn k nhỏ nhất có tính chất này. Khi đó $S_{k-1} > 0$.

Nếu $S_k = 0$ thì chọn $q = k$ là xong.

Xét $S_k < 0$. Khi đó $S_{k-1} > 0$, nên $|S_k| + |S_{k-1}| = |S_k - S_{k-1}| = k|x_k| \leq k$.

Mặt khác, $k = \dfrac{2k+1}{4} + \dfrac{2(k-1)+1}{4}$.

Vì vậy phải có ít nhất một trong hai bất đẳng thức $|S_k| \leq \dfrac{2k+1}{4}$ hoặc $|S_{k-1}| \leq \dfrac{2(k-1)+1}{4}$.

Chọn tương ứng $q = k$ hoặc $q = k - 1$.

Vậy tồn tại $p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ thỏa mãn $S_p \leq 0$ và $|S_q| \leq \dfrac{2q+1}{4}$.

2 **Trường hợp 1.** n lẻ.

Chọn $x_1 = \dfrac{3}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$ và $x_k = (-1)^k$ với $3 \le k \le n$.

Rõ ràng $|x_k| \le 1$ với mọi k. Vì n lẻ nên $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(-1)^k = -1$, do đó $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} - 1 = 0$.

Ta có $S_1 = \dfrac{3}{4}$ và $S_2 = \dfrac{3}{4} + 2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$. Khi đó với $k \ge 2$, ta có $S_k = (-1)^k \dfrac{2k+1}{4}$.

Vì thế $|S_1| = \dfrac{3}{4}$ và $|S_k| = \dfrac{2k+1}{4}$ với mọi $2 \le k \le n$.

Trường hợp 2. n chẵn.

Vì $n \ge 3$ nên $n \ge 4$. Chọn $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{8}$, $x_3 = -1$, $x_4 = -\dfrac{1}{8}$, và với $5 \le k \le n$ đặt $x_k = (-1)^{k+1}$.

Rõ ràng $|x_k| \le 1$ với mọi k. Ta có $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + \dfrac{1}{8} - 1 - \dfrac{1}{8} = 0$ nên

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

Mặt khác, $S_1 = 1$, $S_2 = \dfrac{5}{4}$, $S_3 = -\dfrac{7}{4}$ và $S_4 = -\dfrac{9}{4}$ nên với $k \ge 4$, ta có $S_k = (-1)^{k+1}\dfrac{2k+1}{4}$.

Do đó $|S_1| = 1 > \dfrac{3}{4}$, $|S_2| = \dfrac{5}{4}$, $|S_3| = \dfrac{7}{4}$ và với mọi $k \ge 4$, $|S_k| = \dfrac{2k+1}{4}$.

Vậy trong cả hai trường hợp đều tồn tại $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn các điều kiện đề bài.

Bài toán 0.6. **(Lim Olympic - Ninh Bình TST - P6)**

1 Với mỗi số nguyên dương n, gọi $\sigma(n)$ là tổng các ước dương của n. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho n là ước của $2^{\sigma(n)} - 1$.

2 Cho dãy số nguyên dương $(a_n)_{n\ge1}$ và dãy các số nguyên tố $(p_n)_{n\ge1}$ thỏa mãn, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n \mid a_n, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}\left(p_n^{1013} - 1\right).$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho a_m chia hết cho 2026.

Lời giải.

1 Với $0 \le i \le k-1$, chọn p_i là ước nguyên tố nào đó của $2^{2^i} + 1$.

Dễ thấy $(2^{2^i} + 1, 2^{2^j} + 1) = 1 \quad \forall i \ne j$ nên các p_i phân biệt.

Chọn $n = p_0 p_1 \ldots p_{k-1}$.

$\Rightarrow p_0 p_1 \ldots p_{k-1} \mid (2+1)(2^2+1)\ldots(2^{2^{k-1}}+1) = 2^{2^k} - 1$.

Mà $2^k \mid (p_0+1)(p_1+1)\ldots(p_{k-1}+1) = \sigma(n) \Rightarrow n \mid 2^{2^k} - 1 \mid 2^{\sigma(n)} - 1$.

2 Đặt $q = 1013 \in \mathbb{P}$. Giả sử phản chứng, không tồn tại m để $2q \mid a_m$.

Nhận xét 1: Nếu $p \mid k^{q-1} + k^{q-2} + \cdots + k + 1$ thì $p \equiv 0, 1 \pmod q$.

Ta có $p \mid x^q - 1$. Gọi $h = \mathrm{ord}_p k$, có $h \mid q \Rightarrow h \in \{1, q\}$.

- Nếu $h = 1$ thì $k \equiv 1 \pmod p$, suy ra $p = q$.
- Nếu $h = q$ thì ta có $k^{q-1} \equiv 1 \pmod p$, do đó $q \mid p - 1$.

Nhận xét 2: $\forall n \ge 1$, $p_n \not\equiv 1 \pmod q$.

Nếu tồn tại m để $p_m \equiv 1 \pmod q$, ta có p_m lẻ nên $p_m \equiv 1 \pmod{2q} \Rightarrow a_{m+1} = \dfrac{a_m}{p_m}(p_m^q - 1) \equiv 0 \pmod{2q}$ (vô lý) $\Rightarrow \forall n \geq 1$, ta có $p_n \not\equiv 1 \pmod q$.

Nhận xét 3: $\forall n \geq 2$, $q \nmid a_n$.

Nếu tồn tại n để $q \mid a_n$, $n \geq 2$. Xét n nhỏ nhất như vậy, ta phải có a_n lẻ.

Ta có $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{p_{n-1}}(p_{n-1}^q - 1)$; nếu $p_{n-1} > 2$ thì a_n chẵn (vô lý).

$\Rightarrow p_{n-1} = 2$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2}(2^q - 1)$. Có $q \nmid 2^q - 1$; $q \mid a_n$ nên $q \mid a_{n-1}$.

Mà a_{n-1} chẵn nên $2q \mid a_{n-1}$ (vô lý).

Nhận xét 4: $\forall n \geq 1$, $p_n \leq a_1$.

Giả sử tồn tại n để $p_n > a_1$. Xét số n nhỏ nhất như vậy, khi đó $n > 1$ và $\forall i < n$, $p_i < p_n$.

Chú ý $p_n \not\equiv 0, 1 \pmod q$.

Ta có $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{p_n}(p_n^{2q} - 1) = \cdots = a_1 \prod_{i=1}^{n} \dfrac{p_i^q - 1}{p_i}$

$\Rightarrow p_n \mid a_1(p_1^q - 1)(p_2^q - 1)\dots(p_n^q - 1)$.

Mà từ nhận xét 1, có $p_n \nmid p_i^{q-1} + \cdots + p_i + 1 \quad \forall i = \overline{1,n}$.

Ta cũng có $p_n > a_1$, $p_n > p_i - 1 \quad \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow p_n \nmid a_1(p_1^q - 1)(p_2^q - 1)\dots(p_n^q - 1)$ (vô lý)

Như vậy $p_n \leq a_1$.

Do đó dãy $\{p_n\}$ nhận hữu hạn giá trị, nên tồn tại $p \in \{p_n\}$ để xuất hiện vô hạn lần trong dãy.

Trở lại bài toán ban đầu:

Xét p lớn nhất như vậy, khi đó tồn tại N để $\forall n \geq N$, $p \geq p_n$.

Ta thấy $\forall n \geq N$, $p \nmid p_n - 1$ vì $p \geq p_n$.

Ngoài ra $p \not\equiv 0, 1 \pmod q$ nên $\forall n \geq N$, $p \nmid p_n^{q-1} + \cdots + 1$ (theo Nhận xét 1)

Vì thế $\forall n \geq N$, $p \nmid p_n^q - 1$.

$\Rightarrow \forall n \geq N$, $v_p(a_{n+1}) = v_p(a_n) - v_p(p_n) = \cdots = v_p(a_N) - v_p(p_n p_{n-1} \dots p_N)$

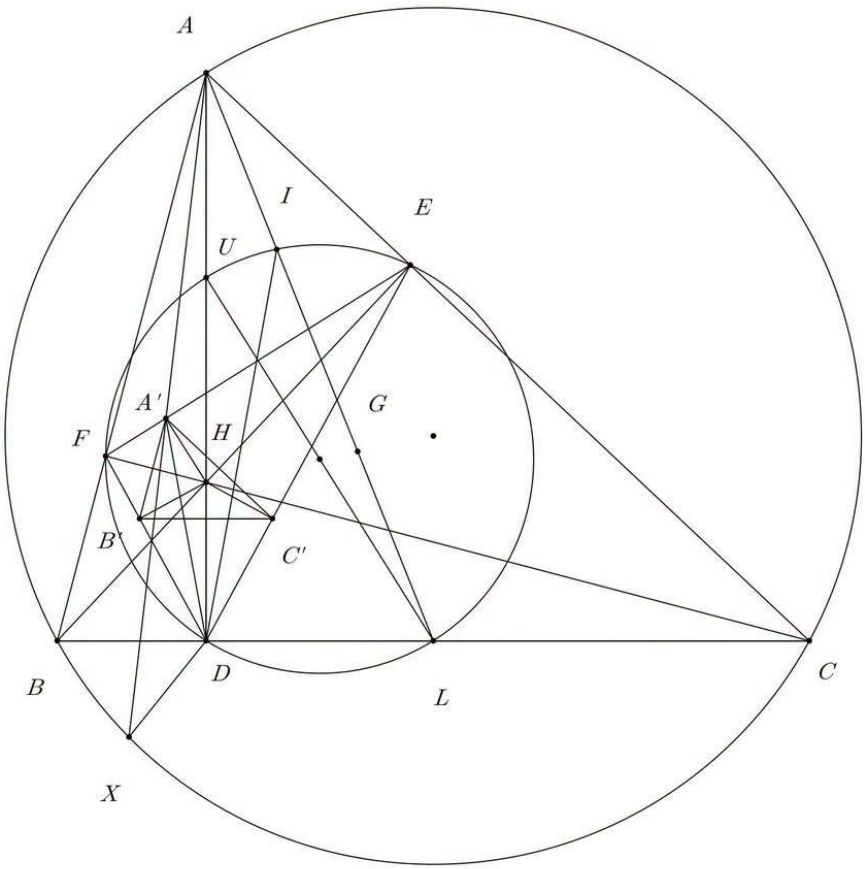
Vì có vô hạn phần tử trong dãy $\{p_n\}$ bằng p, ta chọn được n đủ lớn để trong $p_N, p_{N+1}, \dots, p_n$ có không ít hơn $v_p(a_N) + 1$ số bằng $p \Rightarrow v_p(a_{n+1}) < 0$ (vô lý).

Vậy điều giả sử là sai, ta có tồn tại $m \geq 1$ để $2q \mid a_m$, điều phải chứng minh.

Bài toán 0.7. **(Lim Olympic - Ninh Bình TST - P7)**

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O), có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Các đoạn thẳng AG, BG, CG theo thứ tự cắt đường tròn (DEF) tại I, J, K. Các đường tròn $(AID), (BJE), (CKF)$ cắt lại đường tròn (O) tại các điểm thứ hai tương ứng là X, Y, Z.

1. Chứng minh rằng ba đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm trên đường thẳng OH.
2. Đường thẳng AC cắt đường tròn (AHB) tại điểm thứ hai là N; đường thẳng AB cắt đường tròn (AHC) tại điểm thứ hai là M. Đường tròn (HMN) cắt lại các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai tương ứng là S, T. Chứng minh $ST \perp OH$.



Lời giải.

1. Gọi U là trung điểm AH, L là trung điểm $BC \Rightarrow UL$ là đường kính của (DEF) và $UL \perp EF$.

   Gọi A' là hình chiếu của H trên EF, Gọi X' là giao điểm của AA' và (O).

   Ta có $\angle AFA' = \angle ACB = \angle AX'B \Rightarrow AA' \cdot AX' = AF \cdot AB = AH \cdot AD \Rightarrow A'HDX'$ nội tiếp.

   $\Rightarrow \angle A'X'D = \angle A'HA = \angle HUL = \angle DIL \Rightarrow AIDX'$ nội tiếp $\Rightarrow X'$ trùng X.

   Tương tự ta có BY, CZ đi qua các chân hình chiếu từ H xuống DE, DF lần lượt là C', B'.

Ta thấy $A'B' \perp FH \Rightarrow A'B' // AB \Rightarrow \Delta A'B'C'$ và ΔABC có các cạnh tương ứng song song nên AA', BB', CC' đồng quy tại tâm vị tự hai tam giác mà H là tâm $(A'B'C')$ và O là tâm $(ABC) \Rightarrow AX, BY, CZ$ đồng quy trên OH.

2 Ta có $\angle BNE = 180^\circ - \angle AHB = \angle BCA \Rightarrow EN = EC$ và $FB = FM$.

Gọi DE cắt AB tại P, DF cắt AC tại Q ta có ngay $PA.PB = PE.PD$ và $QA.QC = QF.QD$.

$\Rightarrow PQ$ là trục đẳng phương của (DEF) và $(O) \Rightarrow PQ \perp OH$.

Lại có $\angle AFQ = \angle BFD = \angle ACB = \angle ANB \Rightarrow AQ \cdot AN = AF \cdot AB$.

Tương tự ta cũng có $AM \cdot AP = AE \cdot AC \Rightarrow AQ \cdot AN = AP \cdot AM$.

$\Rightarrow NQMP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle APQ = \angle MNT = \angle MST \Rightarrow PQ // ST$ mà $PQ \perp OH \Rightarrow ST \perp OH$.

