UBND TỈNH PHÚ THỌ
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
NĂM HỌC 2026-2027

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Đề thi gồm 03 câu, 01 trang

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ nhất: **18/9/2026**

Câu 1 (7,0 *điểm*). Cho đa thức $P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ với $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ là các số nguyên và $P_n(x)$ có n nghiệm thực phân biệt lập thành một cấp số cộng.

a) Với $n=4$, chứng minh rằng đa thức $P_4'(x)$ có ba nghiệm thực phân biệt lập thành một cấp số cộng.

b) Chứng minh rằng đa thức $P_n(x)$ luôn phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Câu 2 (7,0 *điểm*). Cho $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$, số nguyên dương k được gọi là một số $n-$**tốt**, nếu tồn tại $a\in\{1; 2; 3;...; 2026\}$ để k là số nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn số hữu tỉ $\frac{10^k-1}{n\cdot a}$ là số thập phân hữu hạn.

a) Chứng minh rằng $k=6$ là một số $18-$**tốt**.

b) Gọi $S(n)$ là tập hợp các số $n-$**tốt**. Tìm giá trị lớn nhất $|S(n)|$ (kí hiệu $|S|$ là số phần tử của tập hợp S).

Câu 3 (6,0 *điểm*). Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai cạnh AD và BC không song song. Giả sử hai đường tròn có đường kính AB và CD cắt nhau tại các điểm E và F nằm bên trong tứ giác. Gọi ω_E là đường tròn đi qua chân các đường vuông góc từ E đến các đoạn thẳng AB, BC, CD. Gọi ω_F là đường tròn đi qua chân các đường vuông góc từ F đến các đoạn thẳng CD, DA, AB.

a) Chứng minh ω_E đi qua chân đường vuông góc của E lên DA.

b) Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng EF nằm trên đường thẳng đi qua hai giao điểm của ω_E và ω_F.

----------HẾT----------

UBND TỈNH PHÚ THỌ
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
NĂM HỌC 2026-2027

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Đề thi gồm 03 câu, 01 trang

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ hai: **19/9/2026**

Câu 4 (7,0 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác trong $AD(D\in BC)$, điểm P thuộc đoạn $AD(P\neq A, P\neq D)$. Gọi X,Y,Z tương ứng là hình chiếu vuông góc của P lên ba cạnh BC,CA,AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cắt lại BC tại điểm X' khác X.

a) Chứng minh rằng AX',BY,CZ đồng quy.

b) Gọi M,N là giao điểm của YZ với đường tròn (O) ($M,Y;Z,N$ thẳng hàng theo thứ tự trên). Gọi S là giao điểm hai tiếp tuyến tại B,C của (O), AP cắt lại (O) tại điểm T khác A. Chứng minh rằng SP,ST đẳng giác góc $\widehat{MSN}$ và SP đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN.

Câu 5 (7,0 *điểm*). Cho tập hợp $S=\{1;\ 2;\ 3;\ldots;\ 2025;\ 2026\}$.

a) Có bao nhiêu tập con khác rỗng của S thỏa mãn tổng các phần tử của tập con đó chia hết cho 4.

b) Xét $n\ (n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ tập hợp con $S_1,S_2,\ldots,S_n$ của S thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1. $S_i\neq\varnothing$ với $i=1,2,\ldots,n$.
2. $|S_i\setminus S_j|\neq 0,\ \forall i\neq j,\ 1\leq i,j\leq n$.
3. $|S_i|\neq|S_j|,\ \forall i\neq j,\ 1\leq i,j\leq n$.

Tìm giá trị lớn nhất của n (kí hiệu $|S|$ là số phần tử của tập hợp S).

Câu 6 (6,0 *điểm*). Với số thực k, xét các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)+y)=kx+f\left(x+f\left(f(y)\right)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Tìm tất cả các giá trị của k để tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

----------HẾT----------

Chương 1

CHỌN ĐTQG PHÚ THỌ 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Phú Thọ TST - P1)

Cho đa thức $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ là các số nguyên và $P_n(x)$ có n nghiệm thực phân biệt lập thành một cấp số cộng.

1. Với $n = 4$, chứng minh rằng đa thức $P_4'(x)$ có ba nghiệm thực phân biệt lập thành một cấp số cộng.
2. Chứng minh rằng đa thức $P_n(x)$ luôn phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Lời giải.

1. Gọi bốn nghiệm của P_4 là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Vì các nghiệm này lập thành một cấp số cộng nên tồn tại số thực m sao cho $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 2m$.

Theo Rolle, $P_4'(x)$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt y_1, y_2, y_3 thoả mãn

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < x_4$$

Với mỗi x không là nghiệm của P_4, ta có $\dfrac{P_4'(x)}{P_4(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3} + \dfrac{1}{x - x_4}$.

Do $m \in (x_2, x_3)$ và $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 2m$ nên $\dfrac{1}{m - x_1} + \dfrac{1}{m - x_4} = 0$ và $\dfrac{1}{m - x_2} + \dfrac{1}{m - x_3} = 0$.

Suy ra $P_4'(m) = 0$, nên $m = y_2$.

Mặt khác, theo định lý Viète, $y_1 + y_2 + y_3 = \dfrac{3}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

Vì $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4m$, suy ra $y_1 + y_2 + y_3 = 3m$.

Kết hợp với $y_2 = m$, ta được $y_1 + y_3 = 2m = 2y_2$.

Vậy ba nghiệm của $P_4'(x)$ lập thành một cấp số cộng.

2. Ta xét hai trường hợp sau:

◈ **Trường hợp 1:** $n = 2k$.

Vì các nghiệm của P_n lập thành một cấp số cộng nên ta có thể viết chúng dưới dạng

$$a - (2k-1)d,\ a - (2k-3)d, \ldots, a - d,\ a + d, \ldots, a + (2k-3)d,\ a + (2k-1)d,$$

với $d > 0$. Theo định lý Viète, tổng các nghiệm bằng $2ka \in \mathbb{Z}$, do đó $a \in \mathbb{Q}$.

Gọi $r_1, r_2, \ldots, r_{2k}$ là các nghiệm của P_n. Ta có $\sum r_i^2 = \left(\sum r_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$.

Theo định lý Viète, hai tổng ở vế phải đều là các số nguyên, do đó $\sum r_i^2 \in \mathbb{Q}$.

Mặt khác, $\sum r_i^2 = 2ka^2 + 2d^2 \sum_{i=1}^{k} (2i-1)^2$. Vì $a \in \mathbb{Q}$ nên suy ra $d^2 \in \mathbb{Q}$.

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, k$, ghép hai nghiệm $a - (2i-1)d$ và $a + (2i-1)d$, ta có

$$\big(x - (a - (2i-1)d)\big)\big(x - (a + (2i-1)d)\big) = (x-a)^2 - (2i-1)^2 d^2 \in \mathbb{Q}[x].$$

Do đó $P_n(x) = \prod_{i=1}^{k}\left((x-a)^2 - (2i-1)^2d^2\right)$ nên P_n khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$.

Mặt khác, P_n là đa thức monic thuộc $\mathbb{Z}[x]$ nên theo bổ đề Gauss, P_n khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

◈ **Trường hợp 2:** $n = 2k+1$.

Ta viết các nghiệm của P_n dưới dạng

$$a-kd,\ a-(k-1)d, \ldots, a-d,\ a,\ a+d, \ldots, a+(k-1)d,\ a+kd$$

với $d > 0$. Theo định lý Viète, $(2k+1)a \in \mathbb{Z}$, nên $a \in \mathbb{Q}$.

Tương tự trường hợp trên, ta cũng suy ra được $d^2 \in \mathbb{Q}$. Vì thế

$$P_n(x) = (x-a)\prod_{i=1}^{k}\left((x-a)^2 - i^2d^2\right),$$

khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$, và theo bổ đề Gauss thì P_n khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Vậy trong mọi trường hợp, ta đều có được $P_n(x)$ có thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài toán 0.2. **(Lim Olympic - Phú Thọ TST - P2)**

Cho $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Số nguyên dương k được gọi là một số n-tốt nếu tồn tại $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 2026\}$ để k là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn số hữu tỉ $\dfrac{10^k - 1}{n \cdot a}$ là số thập phân hữu hạn.

1. Chứng minh rằng $k = 6$ là một số 18-tốt.
2. Gọi $S(n)$ là tập hợp các số n-tốt. Tìm giá trị lớn nhất của $|S(n)|$.

Lời giải.

Trước hết ta có bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề 0.1.

Cho A, B là các số nguyên dương. Phân số $\dfrac{A}{B}$ biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn khi và chỉ khi sau khi rút gọn phân số tối giản, mẫu số chỉ có các ước nguyên tố là 2 và 5.

1. Chọn $a = 7$, ta cần tìm số nguyên dương nhỏ nhất k sao cho $\dfrac{10^k - 1}{126}$ là số thập phân hữu hạn.

   Ta có $126 = 2 \cdot 63$ và $\gcd(10^k - 1, 10) = 1$, nên $10^k - 1$ không chia hết cho 2 hoặc 5.

   Theo bổ đề trên, $\dfrac{10^k - 1}{126}$ là số thập phân hữu hạn khi và chỉ khi $63 \mid 10^k - 1$.

   Để ý $9 \mid 10^k - 1$ với mọi $k \geq 1$ va $\mathrm{ord}_7 10 = 6$ nên $\mathrm{ord}_{63} 10 = 6$.

   Vậy 6 là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $63 \mid 10^k - 1$, suy ra 6 là một số 18-tốt.

2. Cố định n. Viết $n = 2^\alpha 5^\beta m$, trong đó $\gcd(m, 10) = 1$.

   Với mỗi $a \in \{1, 2, \ldots, 2026\}$, viết $a = 2^r 5^s c$, trong đó $\gcd(c, 10) = 1$. Khi đó $na = 2^{\alpha+r} 5^{\beta+s} mc$.

   Vì $\gcd(10^k - 1, 10) = 1$, tử số $10^k - 1$ không có ước nguyên tố 2 hoặc 5.

   Theo bổ đề trên, $\dfrac{10^k - 1}{na}$ là số thập phân hữu hạn khi và chỉ khi $mc \mid 10^k - 1$.

   Do đó số nguyên dương nhỏ nhất k tương ứng với a là $\mathrm{ord}_{mc}(10)$.

Hơn nữa, số k này chỉ phụ thuộc vào c và không phụ thuộc vào các số mũ r, s.

Mặt khác, $1 \le c \le 2026$ và $\gcd(c, 10) = 1$. Vì vậy $|S(n)|$ không vượt quá số các số nguyên dương không quá 2026 nguyên tố cùng nhau với 10, và số các số như vậy là

$$2026 - \left\lfloor \frac{2026}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2026}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2026}{10} \right\rfloor = 2026 - 1013 - 405 + 202 = 810.$$

Vì vậy $|S(n)| \le 810$ với mọi $n \ge 1$.

Giờ ta sẽ chứng minh tồn tại số nguyên dương n sao cho $|S(n)| = 810$.

Chọn số nguyên dương T sao cho $p - 1 \mid T$ với mọi số nguyên tố $p \le 2026$, $p \ne 2, 5$, chẳng hạn

$$T = \operatorname{lcm}\{p - 1 : \ p \le 2026, \ p \text{ nguyên tố}, \ p \ne 2, 5\}.$$

Đặt $M = 10^T - 1$. Ta sẽ chứng minh $|S(M)| = 810$.

Với mỗi số nguyên tố $p \le 2026$, $p \ne 2, 5$, theo định lý Fermat nhỏ, ta có $10^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Vì $p - 1 \mid T$, suy ra $p \mid 10^T - 1 = M$ và hiển nhiên $\operatorname{ord}_M(10) = T$.

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $c \le 2026$ thỏa mãn $\gcd(c, 10) = 1$, ta có $\operatorname{ord}_{cM}(10) = cT$.

Trước hết, ta chứng minh $cM \mid 10^{cT} - 1$.

Xét số nguyên tố $p \mid c$. Vì $p \le c \le 2026$ và $p \ne 2, 5$, theo cách chọn T ta có $p \mid M$. Theo LTE ta có

$$v_p(10^{cT} - 1) = v_p\big((10^T)^c - 1\big) = v_p(10^T - 1) + v_p(c) = v_p(M) + v_p(c).$$

Còn với các số nguyên tố $p \nmid c$ nhưng $p \mid M$, ta có ngay $p^{v_p(M)} \mid 10^T - 1 \mid 10^{cT} - 1$.

Vì vậy $cM \mid 10^{cT} - 1$, suy ra $\operatorname{ord}_{cM}(10) \mid cT$.

Đặt $d = \operatorname{ord}_{cM}(10)$. Vì $M \mid cM$, từ $10^d \equiv 1 \pmod{cM}$ suy ra $10^d \equiv 1 \pmod M$.

Do đó $T = \operatorname{ord}_M(10) \mid d$. Viết $d = Tu$ với $u \in \mathbb{N}^*$.

Với mỗi số nguyên tố $p \mid c$, từ $cM \mid 10^d - 1 = 10^{Tu} - 1$ suy ra

$$v_p(c) + v_p(M) \le v_p(10^{Tu} - 1).$$

Do $p \mid M = 10^T - 1$, áp dụng LTE ta được

$$v_p(10^{Tu} - 1) = v_p(10^T - 1) + v_p(u) = v_p(M) + v_p(u).$$

Suy ra $v_p(c) \le v_p(u)$ với mọi số nguyên tố $p \mid c$. Vậy $c \mid u$, nên $cT \mid d$.

Kết hợp với $d \mid cT$, ta được $\operatorname{ord}_{cM}(10) = cT$.

Bây giờ chọn $n = M$. Với mỗi $c \in \{1, 2, \ldots, 2026\}$ thỏa mãn $\gcd(c, 10) = 1$, lấy $a = c$.

Vì $\gcd(cM, 10) = 1$, theo bổ đề, số nguyên dương nhỏ nhất k sao cho $\dfrac{10^k - 1}{cM}$ là số thập phân hữu hạn chính là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $cM \mid 10^k - 1$. Do đó $k = \operatorname{ord}_{cM}(10) = cT$.

Khi c chạy qua các số không quá 2026 nguyên tố cùng nhau với 10, các số cT đôi một khác nhau.

Có đúng 810 giá trị c như vậy, nên $|S(M)| \ge 810$.

Kết hợp với $|S(n)| \le 810$ với mọi n, suy ra $|S(M)| = 810$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|S(n)|$ là **810**

Nhận xét.

Bài toán trên đã xuất hiện trong **IMO Shortlist 2017**.

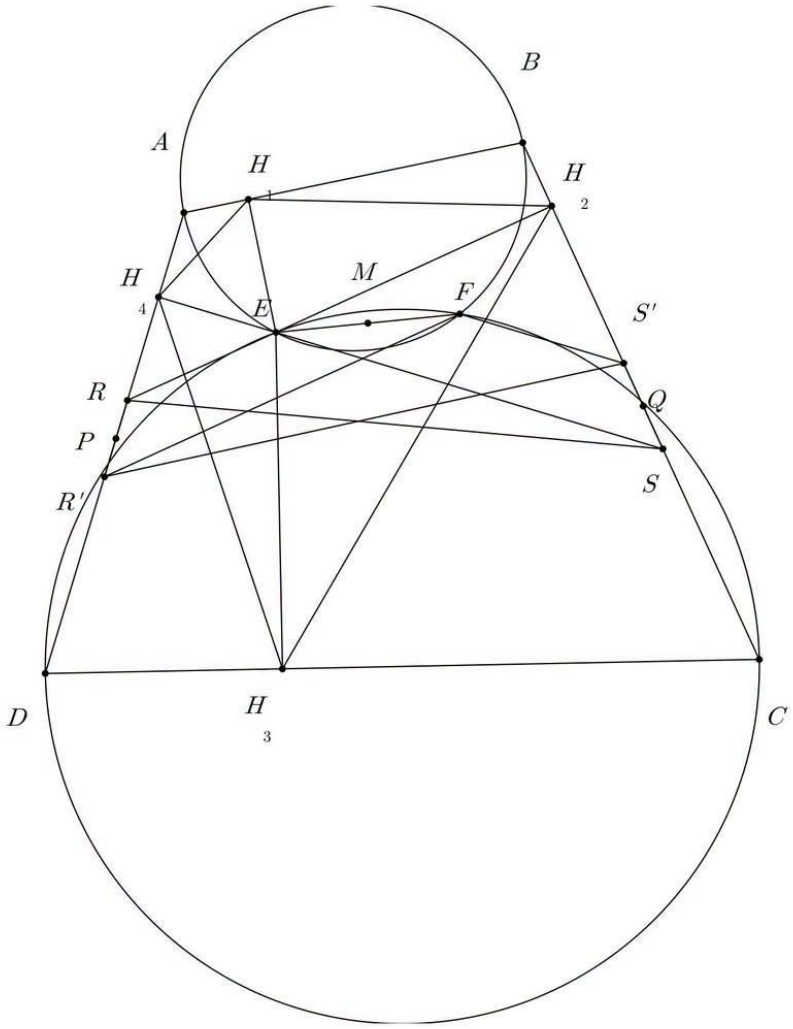
Bằng cách làm tương tự, khi thay 2027 thành N tổng quát thì ta có đáp số cần tìm là

$$N - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor$$

Bài toán 0.3. **(Lim Olympic - Phú Thọ TST - P3)**

Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai cạnh AD và BC không song song. Giả sử hai đường tròn có đường kính AB và CD cắt nhau tại các điểm E và F nằm bên trong tứ giác. Gọi ω_E là đường tròn đi qua chân các đường vuông góc từ E đến các đoạn thẳng AB, BC, CD. Gọi ω_F là đường tròn đi qua chân các đường vuông góc từ F đến các đoạn thẳng CD, DA, AB.

1. Chứng minh ω_E đi qua chân đường vuông góc của E lên DA.
2. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng EF nằm trên đường thẳng đi qua hai giao điểm của ω_E và ω_F.



Lời giải.

1. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là hình chiếu của E trên AB, BC, CD, DA. Từ các tứ giác nội tiếp EH_1BH_2, EH_2CH_3, suy ra: $\angle H_1H_2H_3 = \angle H_1H_2E + \angle EH_2H_3 = \angle ABE + \angle ECD$.

Tương tự: $\angle H_1H_4H_3 = \angle BAE + \angle EDC$. Do đó $\angle H_1H_2H_3 + \angle H_1H_4H_3 = (\angle ABE + \angle BAE) + (\angle ECD + \angle EDC) = 180^\circ$. Vậy H_1, H_2, H_3, H_4 cùng thuộc ω_E.

(2) Dựng $R, R' \in AD$, $S, S' \in BC$ sao cho $ER \perp BC$, $ES \perp AD$, $FR' \perp BC$, $FS' \perp AD$. Ta có: $\angle RH_2S = \angle RH_4S = 90^\circ$. Suy ra H_1, H_2, H_4, S đồng viên. Do đó ω_E là đường tròn đường kính RS. Tương tự, ω_F là đường tròn đường kính $R'S'$.

Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm của EF, RR', SS'. Theo tính chất đường trung bình: $MP \perp SS'$, $MQ \perp RR'$. Theo công thức đường trung tuyến:

$MR^2 + MR'^2 = 2MP^2 + \dfrac{RR'^2}{2}$ và $SR^2 + SR'^2 = 2SP^2 + \dfrac{RR'^2}{2}$. Do đó:

$$\mathcal{P}_{M/(RS)} + \mathcal{P}_{M/(R'S)} = \frac{MR^2 + MR'^2 + 2MS^2 - SR^2 - SR'^2}{2} = MP^2 + MS^2 - PS^2 = 2\mathcal{P}_{M/(PS)}.$$

Tương tự: $\mathcal{P}_{M/(RS')} + \mathcal{P}_{M/(R'S')} = 2\mathcal{P}_{M/(PS')}$.

Do MP là trục đẳng phương của (PS) và (PS'), suy ra:

$$\mathcal{P}_{M/(RS)} + \mathcal{P}_{M/(R'S)} = \mathcal{P}_{M/(RS')} + \mathcal{P}_{M/(R'S')} \tag{1}$$

Do MQ là trục đẳng phương của (RQ) và $(R'Q)$, tương tự ta có:

$$\mathcal{P}_{M/(RS)} + \mathcal{P}_{M/(RS')} = \mathcal{P}_{M/(R'S)} + \mathcal{P}_{M/(R'S')} \tag{2}$$

Cộng theo vế (1) và (2), suy ra $\mathcal{P}_{M/\omega_E} = \mathcal{P}_{M/\omega_F}$.

Vậy M thuộc đường thẳng đi qua hai giao điểm của ω_E, ω_F.

Nhận xét.

Bài toán trên đã xuất hiện trong **IMO Shortlist 2011**.

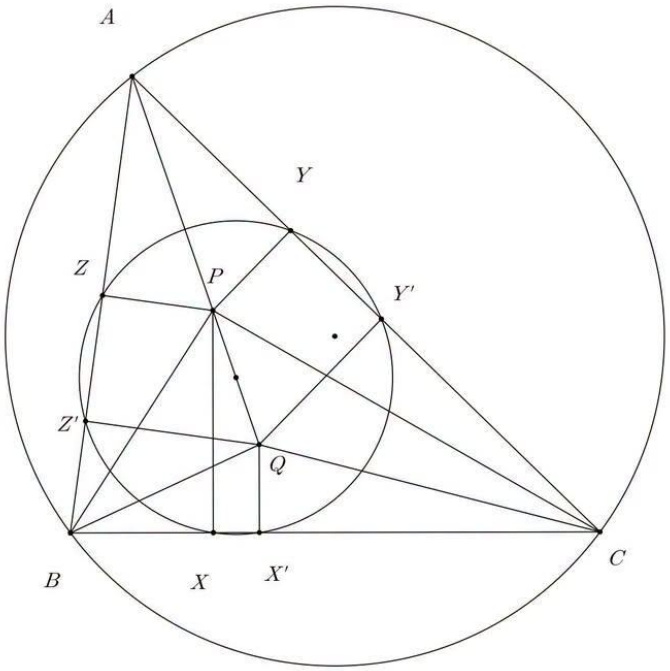
Chương 2

CHỌN ĐTQG PHÚ THỌ 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.4. **(Lim Olympic - Phú Thọ TST - P4)**

Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác trong AD ($D \in BC$), điểm P thuộc đoạn AD ($P \neq A, P \neq D$). Gọi X, Y, Z tương ứng là hình chiếu vuông góc của P lên ba cạnh BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cắt lại BC tại điểm X' khác X.

1. Chứng minh rằng AX', BY, CZ đồng quy.
2. Gọi M, N là giao điểm của YZ với đường tròn (O) (M, Y, Z, N thẳng hàng theo thứ tự trên). Gọi S là giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O), AP cắt lại (O) tại điểm T khác A. Chứng minh rằng SP, ST đẳng giác góc $\widehat{MSN}$ và SP đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN.



Lời giải.

1. Gọi Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong ΔABC. Ta thấy X', Y', Z' là hình chiếu của Q trên BC, CA, AB cũng nằm trên (XYZ).

   Theo định lí *Ceva*, ta cần chứng minh $\dfrac{X'B}{X'C} \cdot \dfrac{YC}{YA} \cdot \dfrac{ZA}{ZB} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{X'B}{X'C} = \dfrac{ZB}{YC}$ $(*)$.

   Mà $BX \cdot BX' = BZ \cdot BZ'$ và $CX \cdot CX' = CY \cdot CY' \Rightarrow \dfrac{X'B}{X'C} = \dfrac{BZ}{CY} \cdot \dfrac{Z'B}{Y'C} \cdot \dfrac{CX}{BX}$.

   Lại có $BX = BP \cdot \cos PBC$, $BZ' = BQ \cdot \cos ABQ$, $CX = CP \cdot \cos PCX$ và $CY' = CQ \cdot \cos ACQ$

$\Rightarrow \dfrac{BZ'}{BX} = \dfrac{BQ}{BP} = \dfrac{AQ}{AP} \cdot \dfrac{\sin BAQ}{\sin BAP}$ và $\dfrac{CY'}{CX} = \dfrac{CQ}{CP} = \dfrac{AQ}{AP} \cdot \dfrac{\sin ACQ}{\sin ACP}$.

Nên thay vào $(*)$ ta cần chứng minh $\dfrac{\sin PBA}{\sin PBC} = \dfrac{\sin PCA}{\sin PCB}$ điều này luôn đúng theo định lí *Ceva* dạng sin của AP, BP, CP đồng quy.

2 Kẻ đường kính TL của (O), U là trung điểm BC, TM cắt BC tại R. Kí hiệu $A/2 = \dfrac{\angle BAC}{2}$.

Theo hệ thức lượng, ta có $\dfrac{UT}{UL} = \dfrac{TB^2}{LB^2} = \tan^2(A/2) = \dfrac{YP^2}{YA^2} = \dfrac{KP}{KA}$.

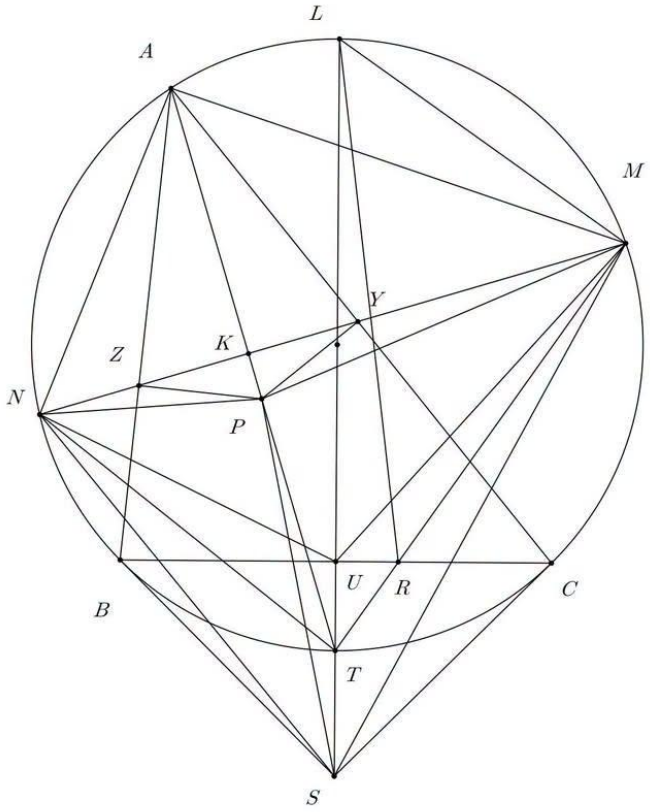
$\Rightarrow \tan(NMP) = \dfrac{KP}{KM} = \dfrac{KA \cdot \tan^2(A/2)}{KM}$ mà $\Delta KAM \sim \Delta LMT$.

$\Rightarrow \tan(NMP) = \dfrac{LM}{MT} \cdot \tan^2(A/2) = \tan(MTU) \cdot \tan^2(A/2) = \tan(MTU) \cdot \dfrac{UL}{UL}$.

Lại có $TU \cdot TL = TR \cdot TM (= TC^2) \Rightarrow \widehat{TMU} = \widehat{TLR}$.

$\Rightarrow \tan UMT = \tan ULR = \dfrac{TU}{LU} \cdot \tan(MTU) = \tan NMP \Rightarrow \widehat{UMT} = \widehat{NMP}$.

Ta thấy MS là đối trung ΔMBC nên MT là phân giác $\widehat{UMS} \Rightarrow \widehat{SMT} = \widehat{UMT} = \widehat{NMP} \Rightarrow MT, MP$ đẳng giác trong $\widehat{NMS}$, tương tự ta có NT, NP cũng đẳng giác trong $\widehat{MNS} \Rightarrow P, T$ liên hợp đẳng giác trong $\Delta NSM \Rightarrow SP, ST$ đẳng giác trong $\widehat{MSN}$ hay S, T cũng liên hợp đẳng giác trong $\Delta NPM \Rightarrow PT, PS$ đẳng giác trong $\widehat{NPM}$. Mà PT là đường cao $\Rightarrow PS$ đi qua tâm (NPM).



Bài toán 0.5. **(Lim Olympic - Phú Thọ TST - P5)**

Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2025, 2026\}$.

1. Có bao nhiêu tập con khác rỗng của S thỏa mãn tổng các phần tử của tập con đó chia hết cho 4?
2. Xét n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) tập hợp con $S_1, S_2, \ldots, S_n$ của S thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:
   - $S_i \neq \varnothing$ với $i = 1, 2, \ldots, n$.
   - $|S_i \setminus S_j| \neq 0$, với mọi $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.
   - $|S_i| \neq |S_j|$, với mọi $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

   Tìm giá trị lớn nhất của n (kí hiệu $|S|$ là số phần tử của tập hợp S).

Lời giải.

1. Với mỗi tập con $T \subset \{3, 4, \ldots, 2026\}$, xét bốn tập T, $T \cup \{1\}$, $T \cup \{2\}$ và $T \cup \{1, 2\}$.

   Giả sử tổng các phần tử của T có số dư là r khi chia cho 4. Khi đó tổng các phần tử của bốn tập trên lần lượt có số dư $r, r+1, r+2, r+3 \pmod 4$.

   Do đó trong bốn tập trên có đúng một tập có tổng các phần tử chia hết cho 4.

   Khi T chạy qua tất cả các tập con của $\{3, 4, \ldots, 2026\}$, các nhóm gồm bốn tập trên tạo thành một phân hoạch của tập hợp tất cả các tập con của S. Có 2^{2024} cách chọn T, nên có đúng 2^{2024} tập con của S có tổng các phần tử chia hết cho 4 (kể cả tập rỗng).

   Giờ trừ đi tập rỗng (có tổng bằng 0) ta được số tập con cần tìm là $\boxed{\mathbf{2^{2024} - 1}}$

2. Điều kiện $|S_i \setminus S_j| \neq 0$ với mọi $i \neq j$ tương đương với $S_i \not\subset S_j$ với mọi $i \neq j$.

   Như vậy các tập $S_1, S_2, \ldots, S_n$ đôi một không chứa nhau.

   Trước hết ta chứng minh $n \leq 2024$.

   Để ý với $n \geq 2$ thì ta không thể có $S_i = S$, do đó $1 \leq |S_i| \leq 2025$ với mọi i.

   Vì các $|S_i|$ đôi một khác nhau nên trước hết ta có $n \leq 2025$.

   Giả sử $n = 2025$. Khi đó các số $|S_i|$ phải nhận đủ các giá trị $1, 2, \ldots, 2025$.

   Gọi A, B, C là tập 3 tập S_i bên trên thoả mãn $|A| = 1$, $|B| = 2025$, $|C| = 2$. Viết $A = \{a\}$.

   Do $A \not\subset B$ nên $a \notin B$. Mà $|B| = 2025$, suy ra $B = S \setminus \{a\}$.

   Mặt khác, từ $A \not\subset C$ ta cũng có $a \notin C$. Vì thế $C \subset S \setminus \{a\} = B$, mâu thuẫn với điều kiện $C \not\subset B$.

   Vậy $n \leq 2024$. Giờ ta sẽ chứng minh giá trị $n = 2024$ đạt được.

   Ta chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi số chẵn $m \geq 4$, tồn tại một họ $\mathcal{F}_m$ gồm $m-2$ tập con của $\{1, 2, \ldots, m\}$ sao cho các tập đôi một không chứa nhau và có kích thước lần lượt là $1, 2, \ldots, m-2$.

   Với $m = 4$, lấy $\mathcal{F}_4 = \big\{\{1\}, \{2, 3\}\big\}$. Rõ ràng họ này thỏa mãn yêu cầu.

   Giả sử đã xây dựng được $\mathcal{F}_m$. Xét họ

   $$\mathcal{F}_{m+2} = \{A \cup \{m+1\} : A \in \mathcal{F}_m\} \cup \{[m], \{m+2\}\},$$

   trong đó $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Các tập $A \cup \{m+1\}$ có kích thước lần lượt là $2, 3, \ldots, m-1$, còn $\{m+2\}$ có kích thước 1 và $[m]$ có kích thước m. Vì vậy $\mathcal{F}_{m+2}$ có đúng một tập ở mỗi kích thước $1, 2, \ldots, m$.

Hai tập dạng $A \cup \{m+1\}$ đôi một không chứa nhau vì các tập A ban đầu đôi một không chứa nhau.

Mỗi tập $A \cup \{m+1\}$ chứa phần tử $m+1$, trong khi $[m]$ không chứa $m+1$, nên $A \cup \{m+1\} \not\subset [m]$.

Ngược lại, $|A \cup \{m+1\}| \leq m-1 < m = |[m]|$, nên $[m] \not\subset A \cup \{m+1\}$.

Cuối cùng, $\{m+2\}$ không chứa trong bất kì tập nào còn lại vì các tập đó không chứa $m+2$; đồng thời các tập còn lại đều có ít nhất hai phần tử nên không thể chứa trong $\{m+2\}$.

Vậy $\mathcal{F}_{m+2}$ cũng thỏa mãn yêu cầu.

Lấy $m = 2026$, ta thu được 2024 tập con của S thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài toán.

Do đó $\boxed{\boldsymbol{n_{\max} = 2024}}$

Bài toán 0.6. **(Lim Olympic - Phú Thọ TST - P6)**

Với số thực k, xét các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(f(x)+y\big) = kx + f\big(x + f(f(y))\big), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tìm tất cả các giá trị của k để tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

Lời giải.

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, đặt $P(x,y)$ là mệnh đề

$$f(f(x)+y) = kx + f\big(x + f(f(y))\big)$$

Đặt $a = f(f(0))$. Từ $P(0,0)$ ta có $f(f(0)) = f(f(f(0)))$, hay $f(a) = a$.
Mặt khác, từ $P(x,0)$, ta suy ra $f(f(x)) = kx + f(x+a)$.
Xét $P(x,a)$, ta có $f(f(a)) = f(a) = a$ nên $f(f(x)+a) = kx + f(x+a)$, từ đó

$$f(f(x)+a) = f(f(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Thay $x = a$ ta được $f(2a) = f(a) = a$.
Mặt khác, ta cũng có $f(f(a)) = ka + f(2a)$ nên $a = ka + a$ hay $ka = 0$.
Nếu $k = 0$ thì rõ ràng mọi hàm hằng đều thoả mãn bài toán, từ đây ta xét $k \neq 0$, ta có $a = 0$.
Khi đó vì $f(a) = a$, ta có $f(0) = 0$.
Từ $P(0,y)$ ta suy ra được $f(y) = f(f(f(y)))$ với mọi $y \in \mathbb{R}$.
Mặt khác, từ $P(x,0)$ ta cũng có $f(f(x)) = kx + f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Thay x bởi $f(x)$ ta được $f(f(f(x))) = kf(x) + f(f(x))$, do đó

$$f(x) = kf(x) + f(x) + kx$$

hay $k(f(x)+x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Vì $k \neq 0$, suy ra $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Thử lại hàm này vào đề bài, ta được $k = 2$, và ứng với hàm $f(x) = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ thoả mãn.
Suy ra tất cả các giá trị cần tìm là $\boxed{\boldsymbol{k \in \{0, 2\}}}$

Nhận xét.

Bài toán trên có lẽ là biến thể của bài hàm trong **IMO Shortlist 2002**.