SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **QUẢNG TRỊ**	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN** **DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA** **NĂM HỌC 2026-2027**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Khóa ngày 21 tháng 9 năm 2026** **Môn thi: TOÁN (Vòng 1)**
SỐ BÁO DANH:	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)* *Đề gồm có 01 trang và 04 câu*

Câu 1. (5.0 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \alpha > 0$ và $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{u_n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng $u_n \geq n$ với mọi $n \geq 2$.

b) Chứng minh rằng dãy số $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2. (5.0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xy + f(x)) + f(y) = xf(y) + f(x + y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (5.0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), với O là tâm. Các đường trung trực của các đoạn AB, AC cắt đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ theo thứ tự tại M, N. Gọi P là giao điểm của đường thẳng BM với CN. H là trực tâm của tam giác OMN và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PMN.

a) Chứng minh rằng $MHNI$ là hình thoi.

b) Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại S. Chứng minh rằng S, A, I thẳng hàng.

Câu 4. (5.0 điểm) Một trường hè toán học gồm $3n$ (với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) học sinh tham gia, trong đó hai học sinh quen nhau bất kỳ có đúng n học sinh quen chung và hai học sinh không quen nhau bất kỳ có đúng $2n$ học sinh quen chung. Nếu ba học sinh đôi một quen nhau thì ta gọi là một nhóm "Bạn bè".

a) Xác định số lượng các nhóm "Bạn bè".

b) Chứng minh rằng: có thể chia $3n$ học sinh trường hè toán học trên thành ba tổ, mỗi tổ có n học sinh sao cho khi lấy ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh thì ba học sinh này tạo thành một nhóm "Bạn bè".

----- HẾT -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG TRỊ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

SỐ BÁO DANH: .....

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
NĂM HỌC 2026-2027
Khóa ngày 21 tháng 9 năm 2026
Môn thi: TOÁN (Vòng 2)

Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Đề gồm có 01 trang và 03 câu

Câu 5. (6.0 điểm)

a) Cho $n = 2026^{2027} + 2027^{2026} + 30$. Chứng minh rằng tổng tất cả các ước số nguyên dương của n chia hết cho 24.

b) Tìm tất các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $\dfrac{xy^3}{x+y} = p$.

Câu 6. (7.0 điểm)

Cho đa giác lồi 2026 đỉnh $A_1A_2...A_{2026}$. Tô màu tất cả các đỉnh của đa giác bởi một trong hai màu đỏ hoặc xanh, mỗi đỉnh chỉ được tô bởi một màu.

a) Tính số cách tô màu sao cho không có 2 đỉnh nào kề nhau đều được tô màu xanh.

b) Tính số cách tô màu sao cho với mọi $k \in \{1;2;...;2026\}$, trong k đỉnh $A_1, A_2, ..., A_k$, số đỉnh được tô màu đỏ không ít hơn số đỉnh được tô màu xanh.

Câu 7. (7.0 điểm)

Trên đường tròn (O) cố định, cho dây cung BC cố định khác đường kính và điểm A di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và không cân. Gọi D, E lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ của đường tròn (O). Đoạn thẳng DE cắt AB, AC lần lượt tại X, Y. Giả sử các đường tròn (BDX), (CEY) cắt nhau tại hai điểm I, K phân biệt và các đường tròn (BEX), (CDY) cắt nhau tại hai điểm R, S phân biệt.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} \neq 60^o$ và đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường thẳng RS đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC và trung điểm RS di động trên một đường tròn cố định.

----- HẾT -----

Chương 1

CHỌN ĐTQG QUẢNG TRỊ 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Quảng Trị TST - P1)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a > 0$ và $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{u_n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Chứng minh rằng $u_n \geq n$ với mọi $n \geq 2$.
2. Chứng minh rằng dãy số $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải.

1. Ta có $u_2 = a + \dfrac{1}{a} \geq 2$. Giả sử $u_n \geq n$ với $n \geq 2$ nào đó. Khi đó

$$u_{n+1} - (n+1) = u_n + \frac{n}{u_n} - n - 1 = \frac{(u_n - n)(u_n - 1)}{u_n} \geq 0.$$

Suy ra $u_{n+1} \geq n + 1$. Theo quy nạp, ta có $u_n \geq n$ với mọi $n \geq 2$.

2. Ta có $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2n + \dfrac{n^2}{u_n^2}$ nên $u_n^2 = a^2 + n(n-1) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^2}{u_i^2}$ với mọi $n \geq 2$.

Để ý với $i \geq 2$ ta có $u_i \geq i$, nên $\dfrac{i^2}{u_i^2} \leq 1$. Vì vậy

$$a^2 + n(n-1) \leq u_n^2 \leq a^2 + n(n-1) + \frac{1}{a^2} + n - 2.$$

Từ đó ta suy ra được với mọi $n \geq 2$ thì

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{a^2}{n^2} \leq \frac{u_n^2}{n^2} \leq 1 + \frac{a^2 + a^{-2} - 2}{n^2}.$$

Theo nguyên lý kẹp ta có $\dfrac{u_n^2}{n^2} \to 1$, và vì $u_n > 0$ nên $\dfrac{u_n}{n} \to 1$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Quảng Trị TST - P2)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xy + f(x)) + f(y) = xf(y) + f(x + y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Kí hiệu $P(x, y)$ là mệnh đề $f(xy + f(x)) + f(y) = xf(y) + f(x + y)$.

Từ $P(0, 0)$ suy ra $f(f(0)) = 0$. Thay $x = f(0)$, $y = 0$, ta được $2f(0) = f(0)^2$, nên $f(0) \in \{0, 2\}$.

- Trước hết, xét $f(0) = 2$. Khi đó $f(2) = 0$. Từ $P(x, 0)$, ta có

$$f(f(x)) + 2 = 2x + f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó ta suy ra được f là đơn ánh.

Với $x \neq 1$, xét $P(x, y)$ với $y = \dfrac{f(x) - x}{1 - x}$. Khi đó $xy + f(x) = x + y$, do đó $(x - 1)f(y) = 0$.

Suy ra $f(y) = 0 = f(2)$. Vì f đơn ánh nên $y = 2$, tức là $f(x) = 2 - x$ với mọi $x \neq 1$.

Mặt khác, $P(1, x)$ cho $f(x + f(1)) = f(x + 1)$ nên $f(1) = 1$. Vậy $f(x) = 2 - x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

◈ Tiếp theo, xét $f(0) = 0$. Giả sử $f(a) = f(b) = c$. Lấy $P(a, b)$ trừ $P(b, a)$, ta được $c(a - b) = 0$.

Vì thế nếu $f(a) = f(b) \neq 0$ thì $a = b$.

Từ $P(x, 0)$ suy ra $f(f(x)) = f(x)$. Do đó, với mỗi x, nếu $f(x) \neq 0$ thì $f(f(x)) = f(x) \neq 0$, nên theo nhận xét trên thì $f(x) = x$. Vậy $f(x) \in \{0, x\}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

☆ Nếu $f(1) = 0$ thì $P(1, x)$ cho $f(x) = f(x + 1)$ với mọi x. Nếu tồn tại $x \neq 0$ sao cho $f(x) = x$, thì $f(x) = f(x + 1) \neq 0$, suy ra $x = x + 1$, vô lý. Do đó $f \equiv 0$.

☆ Nếu $f(1) = 1$, giả sử tồn tại $x \neq 0$ sao cho $f(x) = 0$. Từ $P(1 - x, x)$ suy ra

$$f\big(x - x^2 + f(1 - x)\big) = 1.$$

Vì $f(t) \in \{0, t\}$ với mọi t, ta có $x - x^2 + f(1 - x) = 1$.

- Nếu $f(1 - x) = 0$ thì $x - x^2 = 1$, vô nghiệm.
- Nếu $f(1 - x) = 1 - x$ thì $x - x^2 + 1 - x = 1$, suy ra $x = 0$, mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại $x \neq 0$ sao cho $f(x) = 0$, nên $f(x) = x$ với mọi x.

Thử lại, cả ba hàm $f(x) = 0$, $f(x) = x$ và $f(x) = 2 - x$ đều thoả mãn và đây là các nghiệm hàm cần tìm.

Nhận xét.

Ta cũng có thể giải bài toán trên khi đổi từ $\mathbb{R}$ thành $\mathbb{R}^+$.

Bài toán. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xy + f(x)) + f(y) = xf(y) + f(x + y)$$

với mọi $x, y > 0$.

Bài toán 0.3. **(Lim Olympic - Quảng Trị TST - P3)**

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), với O là tâm. Các đường trung trực của các đoạn AB, AC cắt đường phân giác trong của góc BAC theo thứ tự tại M, N. Gọi P là giao điểm của đường thẳng BM với CN. H là trực tâm của tam giác OMN và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PMN.

1. Chứng minh rằng $MHNI$ là hình thoi.
2. Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại S. Chứng minh rằng S, A, I thẳng hàng.

Lời giải.

1. Ta có $\angle PMN = 2\angle BAM = \angle BAC = 2\angle NAC = \angle PNM$ nên ΔPMN cân tại P.

Gọi X, Y là trung điểm AC, AB. Ta có $\angle OMN = \angle AMY = 90^\circ - \angle BAM = 90^\circ - \angle CAM = \angle ONM$ nên ΔOMN cân tại $O \Rightarrow O, H, I, P$ cùng nằm trên trung trực MN.

Lại có $MH // AC \Rightarrow \angle HMN = \angle NAC = \dfrac{\angle PMN}{2} = \angle IMN$.

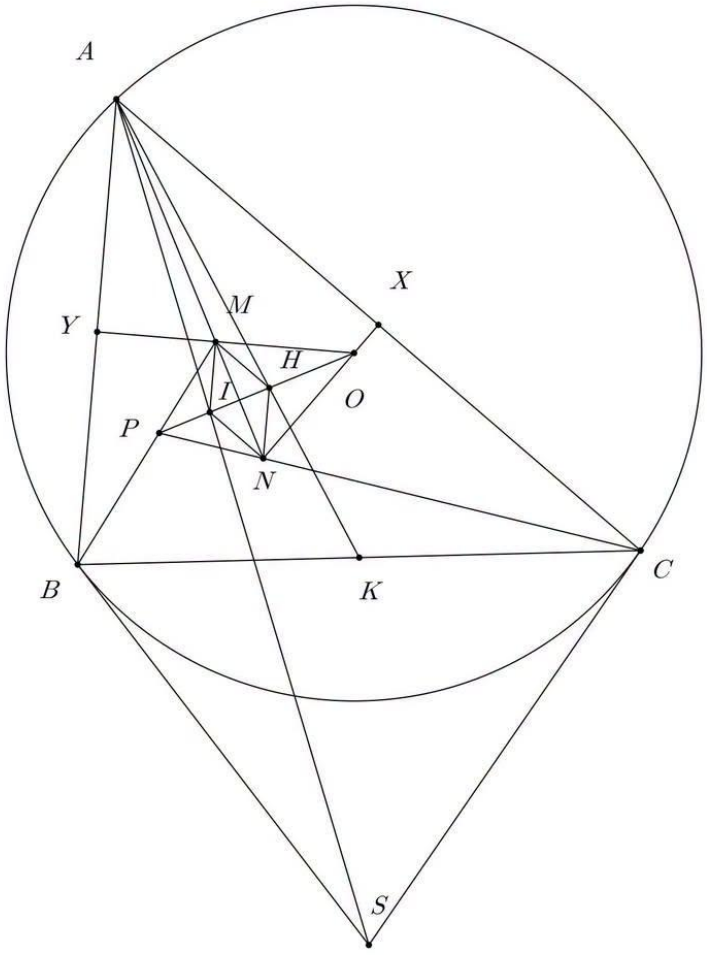
$\Rightarrow MN$ là trung trực HI nên $MHNI$ là hình thoi.

2. Ta có $MH // AC$, $NH // AB$ nên

$$\frac{d(H, AB)}{d(H, AC)} = \frac{d(N, AB)}{d(M, AC)} = \frac{d(N, AC)}{d(M, AB)} = \frac{NX}{MY} = \frac{AX \cdot \tan NAX}{AY \cdot \tan MAY} = \frac{AC}{AB}$$

$\Rightarrow AH$ đi qua trung điểm K của BC, mà AS là đối trung của ΔABC.

$\Rightarrow \angle SAB = \angle KAC = \angle HAC = \angle BAI \Rightarrow A, I, S$ thẳng hàng.



Bài toán 0.4. **(Lim Olympic - Quảng Trị TST - P4)**

Một trường hè toán học gồm $3n$ ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) học sinh tham gia, trong đó hai học sinh quen nhau bất kỳ có đúng n học sinh quen chung và hai học sinh không quen nhau bất kỳ có đúng $2n$ học sinh quen chung. Nếu ba học sinh đôi một quen nhau thì ta gọi là một nhóm **Bạn bè**.

1. Xác định số lượng các nhóm **Bạn bè**.
2. Chứng minh rằng có thể chia $3n$ học sinh của trường hè toán học trên thành ba tổ, mỗi tổ có n học sinh sao cho khi lấy ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh thì ba học sinh này tạo thành một nhóm **Bạn bè**.

Lời giải.

Với mỗi học sinh A, kí hiệu d_A là số học sinh quen A.

Trước hết chứng minh mọi học sinh đều có cùng số người quen.

Lấy hai học sinh phân biệt A, B và ta sẽ đếm số dãy $A - X - Y - B$ mà hai học sinh liên tiếp quen nhau.

- Nếu A, B không quen nhau, trong số d_A học sinh X quen A có đúng $2n$ học sinh cũng quen B.

  Do đó số dãy trên bằng $2n \cdot n + (d_A - 2n) \cdot 2n = 2nd_A - 2n^2$.

  Tương tự cũng có số dãy trên bằng $2nd_B - 2n^2$, suy ra $d_A = d_B$.

- Nếu A, B quen nhau, trường hợp $X = B$ cho d_B cách chọn Y.

  Ngoài ra có n học sinh X quen cả A, B, và $d_A - n - 1$ học sinh X quen A nhưng không quen B.

  Vì vậy số dãy là $d_B + n^2 + 2n(d_A - n - 1)$, tương tự cũng bằng $d_A + n^2 + 2n(d_B - n - 1)$.

  Suy ra $(2n - 1)(d_A - d_B) = 0$, nên $d_A = d_B$.

Vậy mọi học sinh đều có cùng số người quen, kí hiệu là d.

Cố định một học sinh A và ta sẽ đếm số cặp có thứ tự (B, C) sao cho A quen B, B quen C và $C \neq A$.

Dễ dàng tính được số cặp như trên bằng $d(d - 1)$.

Mặt khác, nếu C quen A thì có n cách chọn B, còn nếu C không quen A thì có $2n$ cách. Do đó

$$d(d - 1) = dn + 2n(3n - 1 - d)$$

Khi đó $(d - 2n)(d + 3n - 1) = 0$, và vì $d > 0$ suy ra $d = 2n$.

Do đó mỗi học sinh đều quen đúng $2n$ người khác.

1. Số cặp học sinh quen nhau là $\dfrac{3n \cdot 2n}{2} = 3n^2$. Mỗi cặp quen nhau có đúng n người quen chung, nên nằm trong đúng n nhóm **Bạn bè**. Mỗi nhóm **Bạn bè** có ba cặp học sinh quen nhau.

   Vì vậy số nhóm **Bạn bè** là

   $$\frac{3n^2 \cdot n}{3} = n^3.$$

2. Với mỗi học sinh A, gọi T_A là tập gồm A và tất cả những học sinh không quen A.

   Vì A quen đúng $2n$ học sinh nên $|T_A| = n$.

   Nếu A không quen B, hai học sinh này có đúng $2n$ người quen chung. Mà cả A và B đều có đúng $2n$ người quen, nên tập những người quen của A và của B trùng nhau. Do đó $T_A = T_B$.

   Suy ra các tập T_A hoặc trùng nhau, hoặc rời nhau, và mỗi tập có đúng n phần tử. Vì có $3n$ học sinh nên toàn bộ học sinh được chia thành đúng ba tập như vậy, gọi là T_1, T_2, T_3.

   Hai học sinh thuộc hai tập khác nhau phải quen nhau; nếu không thì chúng phải thuộc cùng một tập. Vì thế, chọn một học sinh từ mỗi T_1, T_2, T_3 thì ba học sinh đó đôi một quen nhau.

   Vậy ba tập T_1, T_2, T_3 là ba tổ cần tìm.

Chương 2

CHỌN ĐTQG QUẢNG TRỊ 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Quảng Trị TST - P5)

1. Cho $n = 2026^{2027} + 2027^{2026} + 30$. Chứng minh rằng tổng tất cả các ước số nguyên dương của n chia hết cho 24.
2. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $\dfrac{xy^3}{x+y} = p$.

Lời giải.

1. **Trước hết ta có bổ đề sau:**

Bổ đề 0.1.

Với số nguyên dương n thoả mãn $n+1$ chia hết cho 24 thì $\sigma(n)$ chia hết cho 24.

Chứng minh. Để ý nếu $n \equiv -1 \pmod{24}$ thì n không là số chính phương.

Gọi $d_1, d_2, \cdots, d_k$ là tất cả các ước dương của n bé hơn $\sqrt{n}$.

Để ý với d là ước dương của n thì $d + \dfrac{n}{d} = \dfrac{d^2+n}{d}$ chia hết cho 24, vì thế $\sigma(n)$ chia hết cho 24. □

Để ý $n \equiv 2 \pmod 3$ và $n \equiv 7 \pmod 8$ nên $n \equiv -1 \pmod{24}$, theo bổ đề có điều phải chứng minh.

2. Đặt $d = (x, y)$, $x = da$, $y = db$ với $(a, b) = 1$. Khi đó ta có được

$$\frac{d^3ab^3}{a+b} = p.$$

Do $(a, b) = 1$ nên $(a + b, ab^3) = 1$. Vì $a + b \mid d^3ab^3$, nên $a + b \mid d^3$.

Đặt $d^3 = c(a + b)$ với $c \in \mathbb{N}^*$ thì $cab^3 = p$.

Vì p là số nguyên tố nên $b = 1$. Do đó $ca = p$, nên ta có hai trường hợp sau:

- Nếu $a = 1$, $c = p$, thì $d^3 = 2p$, vô lý vì $2p$ không thể là một lập phương.
- Nếu $a = p$, $c = 1$, thì $d^3 = p + 1$ hay $p = d^3 - 1 = (d - 1)(d^2 + d + 1)$. Vì p là số nguyên tố và $d^2 + d + 1 > 1$, ta phải có $d - 1 = 1$. Suy ra $d = 2$ và $p = 7$.

  Khi đó $x = 14$ và $y = 2$.

Thử lại thấy thoả mãn, vậy nghiệm duy nhất thoả mãn là $(x, y, p) = (14, 2, 7)$.

Nhận xét.

Bài toán trên là bài toán đã xuất hiện trong đề thi **Hy Lạp MO 2015**.

Ta cũng có thể làm mạnh bài toán như sau:

Bài toán: Cho số nguyên dương k. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p sao cho

$$\frac{xy^3}{x+y} = p^k$$

Bài toán 0.6. **(Lim Olympic - Quảng Trị TST - P6)**

Cho đa giác lồi 2026 đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_{2026}$. Tô màu tất cả các đỉnh của đa giác bởi một trong hai màu đỏ hoặc xanh, mỗi đỉnh chỉ được tô bởi một màu.

1. Tính số cách tô màu sao cho không có hai đỉnh nào kề nhau đều được tô màu xanh.
2. Tính số cách tô màu sao cho với mọi $k \in \{1, 2, \ldots, 2026\}$, trong k đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_k$, số đỉnh được tô màu đỏ không ít hơn số đỉnh được tô màu xanh.

Lời giải.

1. Trước hết xét một dãy gồm m đỉnh thẳng hàng. Gọi a_m là số cách tô đỏ, xanh các đỉnh sao cho không có hai đỉnh xanh liên tiếp.

   Ta có $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Với $m \geq 3$, xét màu của đỉnh cuối cùng. Nếu đỉnh cuối màu đỏ thì $m-1$ đỉnh trước có a_{m-1} cách tô. Nếu đỉnh cuối màu xanh thì đỉnh ngay trước nó bắt buộc màu đỏ, còn $m-2$ đỉnh đầu có a_{m-2} cách tô. Do đó $a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$.

   Trở lại với đa giác 2026 đỉnh. Xét màu của A_1.

   - Nếu A_1 màu đỏ thì $A_2, A_3, \ldots, A_{2026}$ là một dãy 2025 đỉnh, nên có a_{2025} cách tô.
   - Nếu A_1 màu xanh thì do A_2 và A_{2026} đều kề A_1, hai đỉnh này bắt buộc màu đỏ. Khi đó chỉ còn dãy $A_3, A_4, \ldots, A_{2025}$ gồm 2023 đỉnh cần tô, nên có a_{2023} cách.

   Vì vậy số cách tô là $a_{2025} + a_{2023} = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2026} + \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2026}$.

2. Ta biểu diễn mỗi cách tô bằng một quỹ đạo trên lưới ô vuông, xuất phát từ $O = (0, 0)$ như sau:

   - Nếu A_i được tô đỏ thì đi một bước sang phải.
   - Nếu A_i được tô xanh thì đi một bước lên trên.

   Sau k bước, hoành độ của điểm đang đứng bằng số đỉnh đỏ trong $A_1, A_2, \ldots, A_k$, còn tung độ bằng số đỉnh xanh. Vì vậy điều kiện của bài toán tương đương với việc quỹ đạo luôn nằm trên hoặc phía dưới đường thẳng $y = x$.

   Giả sử có đúng j đỉnh xanh, với $0 \leq j \leq 1013$. Khi đó có $2026 - j$ đỉnh đỏ, nên quỹ đạo đi từ $(0, 0)$ đến $(2026 - j, j)$ bằng $2026 - j$ bước sang phải và j bước lên.

   Nếu bỏ qua điều kiện $y \leq x$, số quỹ đạo là C_{2026}^{j}, và ta cần tính số quỹ đạo không thoả mãn.

   Một quỹ đạo như vậy phải có lúc đi lên phía trên đường $y = x$. Xét điểm đầu tiên quỹ đạo chạm đường $y = x + 1$, giả sử đó là $(t, t+1)$. Lúc lấy đối xứng quỹ đạo từ $(0, 0)$ đến $(t, t+1)$ qua đường $y = x$, tức là đổi mỗi bước sang phải thành bước lên và mỗi bước lên thành bước sang phải. Khi đó điểm $(t, t+1)$ biến thành $(t+1, t)$, nên toàn bộ quỹ đạo biến thành một quỹ đạo từ $(0, 0)$ đến $(2027 - j, j - 1)$.

   Ngược lại, với một quỹ đạo bất kỳ từ $(0, 0)$ đến $(2027 - j, j - 1)$, vì hoành độ cuối lớn hơn tung độ cuối nên quỹ đạo có một điểm đầu tiên nằm trên đường $x = y + 1$. Đối xứng đoạn đầu đến điểm đó qua $y = x$ ta thu lại duy nhất một quỹ đạo từ $(0, 0)$ đến $(2026 - j, j)$ đã đi lên phía trên $y = x$. Do đó đây là một song ánh.

   Vì quỹ đạo từ $(0, 0)$ đến $(2027 - j, j - 1)$ có đúng $j - 1$ bước lên trong tổng số 2026 bước, số quỹ đạo không thỏa mãn là C_{2026}^{j-1}. Vậy với đúng j đỉnh xanh, số cách tô thỏa mãn là $C_{2026}^{j} - C_{2026}^{j-1}$, với

quy ước $C_{2026}^{-1}=0$. Cộng j từ 0 tới 1013, ta được số cách tô thoả mãn là

$$\sum_{j=0}^{1013}\left(C_{2026}^{j}-C_{2026}^{j-1}\right)=C_{2026}^{1013}.$$

Nhận xét.

Bài toán trên sử dụng ý tưởng quỹ đạo tương tự với **Hưng Yên TST 2026**.

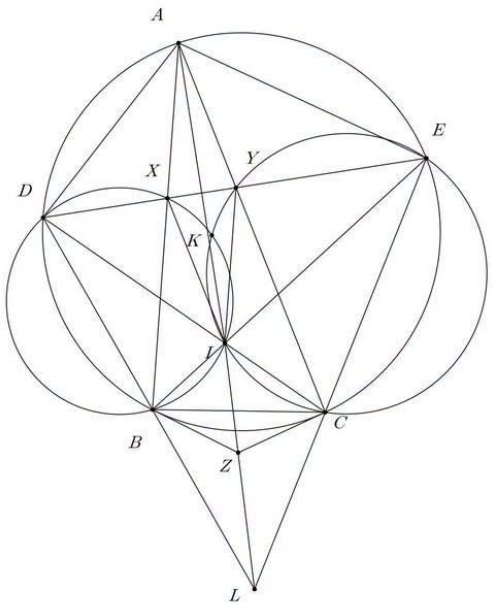
Bài toán: Cho số nguyên dương n. Hai bạn A và B cùng tham gia một trò chơi gồm n lượt. Mỗi lượt, họ độc lập giải cùng một câu đố và kết quả là mỗi người chơi hoặc giải được hoặc không giải được. Đặt $c_A(i), c_B(i)$ lần lượt là tổng số câu đố mà A, B giải được trong i lượt đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu kịch bản có thể xảy để A đạt giải đặc biệt, nghĩa là sau khi kết thúc toàn bộ n lượt chơi, A không chỉ giải được nhiều câu đố hơn B ($c_A(n) > c_B(n)$), mà còn chưa bao giờ để B bỏ xa quá một câu trong suốt quá trình ($\forall i = 1, 2, \ldots, n : c_B(i) - c_A(i) \leq 1$)?

Bài toán 0.7. (Lim Olympic - Quảng Trị TST - P7)

Trên đường tròn (O) cố định, cho dây cung BC cố định khác đường kính và điểm A di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và không cân. Gọi D, E lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ AB, AC của đường tròn (O). Đoạn thẳng DE cắt AB, AC lần lượt tại X, Y. Giả sử các đường tròn $(BDX), (CEY)$ cắt nhau tại hai điểm I, K phân biệt và các đường tròn $(BEX), (CDY)$ cắt nhau tại hai điểm R, S phân biệt.

1. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} \neq 60^\circ$ và đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.
2. Chứng minh rằng đường thẳng RS đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC và trung điểm RS di động trên một đường tròn cố định.

Lời giải.



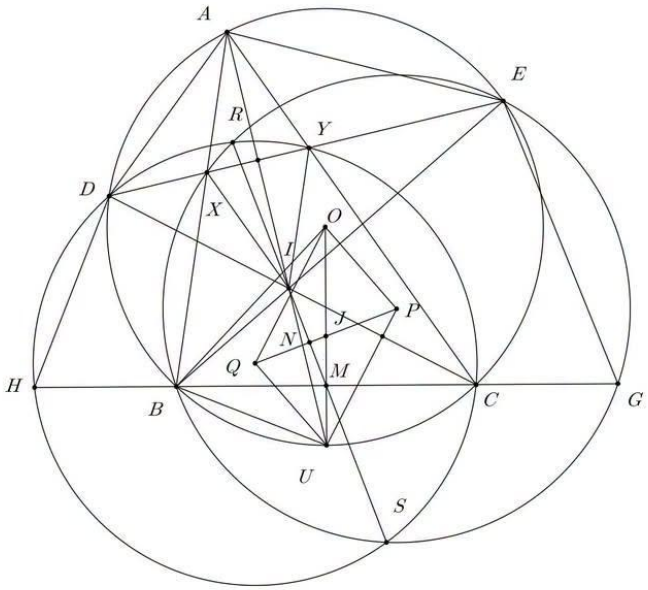
1 Gọi I' là BE cắt CD thì để ý ta có DE là trung trực $AI' \Rightarrow AXI'Y$ là hình thoi.

$\Rightarrow \angle BXD = \angle AXY = 90^\circ - \dfrac{\angle BAC}{2} = \angle I'BC + \angle I'CB = \angle BI'D$ nên I' nằm trên (BXD).

Tương tự ta có I' nằm trên (CYE) nên I' trùng I.

Giả sử $\angle BAC = 60^\circ$. Kẻ tiếp tuyến Ix của (BIX), giả sử Ix nằm trong $\angle XIY$, thế hình khác xử lí tương tự. Ta có $\angle xIy = \angle XIY - \angle XIx = 60^\circ - \angle ABI = \angle ACI \Rightarrow Ix$ cũng là tiếp tuyến của (CIY) (vô lí) nên $\angle BAC$ khác 60°.

Xét tâm đẳng phương (BDX), (CEY) và (O) ta có BD, CE, IX đồng quy tại L. Áp dụng định lí *Pascal* cho bộ $\begin{pmatrix} B & C & D \\ C & B & E \end{pmatrix}$ ta có I, Z, L thẳng hàng với Z là giao 2 tiếp tuyến tại B, C của (O) nên IK đi qua Z cố định.



2 Gọi M, N là trung điểm BC, RS, P, Q là tâm $(BXE), (CYD)$ và BC cắt $(P), (Q)$ lần lượt tại G, H.

Ta thấy DE là trung trực AI nên $\angle EBG = \angle B/2$ và $\angle EGB = \angle AXE = 90 - \angle A/2$

$\Rightarrow \angle GEB = \angle A + \angle C/2 \Rightarrow BG = \dfrac{BE \cdot \sin(\angle A + \angle C/2)}{\cos(\angle A/2)}$ theo định lí hàm sin.

Mà $BE = 2OA \cdot \sin \angle BAE = 2OA \cdot \sin(\angle A + \angle B/2)$ nên

$$\Rightarrow BG = \frac{2OA \cdot \sin(\angle A + \angle B/2) \cdot \sin(\angle A + \angle C/2)}{\cos(\angle A/2)}$$

Tương tự ta cũng được CH bằng độ dài trên nên $MC \cdot MH = MB \cdot MG \Rightarrow M$ nằm trên RS và $ID \cdot IC = IB \cdot IE$ nên R, I, M, S cùng nằm trên trục đẳng phương của (P) và (Q).

Gọi AI cắt (O) tại U. Ta có $\angle BPO = 1/2\angle BPE = 180 - \angle BXE = 90 - \angle A/2 = \angle OUB$ nên tứ giác $OPUB$ nội tiếp $\Rightarrow \angle OUP = \angle OBP = 90 - \angle OPB = \angle DCB$.

$\Rightarrow UP \perp CD \Rightarrow UP // OQ$. Tương tự ta có $OP // UQ \Rightarrow OPUQ$ là hình bình hành.

$\Rightarrow PQ$ qua trung điểm J của OU cố định và vuông góc RS tại N nên N nằm trên (JM) cố định.