SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THÁI NGUYÊN

THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
NĂM HỌC 2026 - 2027

Đề thi chính thức

Môn thi: **Toán**
Thời gian làm bài: **180 phút** (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: **10/9/2026**
Đề thi gồm: 06 câu, 01 trang

Câu 1 (3,0 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}+\frac{1}{a+b+1}\geq 2\left(\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+5}+\frac{1}{c+5}\right).$$

Câu 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (a_n): $\begin{cases} a_1=2026 \\ na_n=a_{n-1}+1,\ \forall n\geq 2 \end{cases}$. Xác định giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương k sao cho $2026a_k<1$.

Câu 3 (4,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(yf(x+y)+f(x)\big)=4x+2yf(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho n số nguyên dương đôi một phân biệt $a_1,\ldots,a_n$. Đặt

$$b_i=(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n).$$

Chứng minh rằng $(n-1)!$ là ước của $\text{lcm}(b_1,\ldots,b_n)$, trong đó $\text{lcm}(b_1,\ldots,b_n)$ là bội chung nhỏ nhất của các số nguyên $b_1,\ldots,b_n$.

Câu 5 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB<AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M. Đường tròn tâm E bán kính EM cắt cung nhỏ BC của đường tròn (O) và tia MO tại các điểm thứ hai tương ứng là D và Q. Lấy điểm P thuộc đoạn thẳng AD ($P\neq A, P\neq D$) sao cho $\widehat{ABP}=\widehat{ACP}$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, Q, D đồng viên.

b) Gọi giao điểm của AM với BP, CP tương ứng là K, L. Chứng minh rằng OP là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

Câu 6 (3,0 điểm). Cho số nguyên dương n và tập hợp A gồm $60n+1$ số nguyên dương không vượt quá $210n$ và nguyên tố cùng nhau với 14. Chứng minh rằng trong A luôn tồn tại hai số mà một số chia hết cho ba lần số còn lại.

——— Hết ———

Chú ý:
- *Thí sinh không được dùng tài liệu.*
- *Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

LỜI GIẢI:

Thực hiện bởi: **THLM Team**

Câu 1:

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}+\frac{1}{a+b+1}\geq 2\left(\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+5}+\frac{1}{c+5}\right).$$

Từ giả thiết $a+b+c=3$, ta có $b+c=3-a$. Thay vào đề, ta được:

$$\frac{1}{4-a}+\frac{1}{4-b}+\frac{1}{4-c}\geq \frac{2}{a+5}+\frac{2}{b+5}+\frac{2}{c+5}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{1}{4-a}-\frac{2}{a+5}\right)\geq 0.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $x\in(0;3)$:

$$\frac{1}{4-x}-\frac{2}{x+5}\geq \frac{x-1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{(4-x)(x+5)}-\frac{x-1}{6}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x+2)}{6(4-x)(x+5)}\geq 0 \quad \text{(đúng với mọi } x\in(0;3)).$$

Áp dụng lần lượt cho a, b, c, ta thu được:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{4-a}-\frac{2}{a+5}\right)\geq \sum_{cyc}\frac{a-1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{1}{4-a}-\frac{2}{a+5}\right)\geq \frac{a+b+c-3}{6}=0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ĐTXR khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 2:

Cho dãy số (a_n): $\begin{cases} a_1=2026 \\ na_n=a_{n-1}+1,\ \forall n\geq 2 \end{cases}$. Xác định giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương k sao cho $2026a_k<1$.

Ta có $na_n=a_{n-1}+1, \forall n\geq 2$

$$\Rightarrow n!a_n=(n-1)!a_{n-1}+(n-1)!$$

Đặt $b_n = n!a_n$, ta có hệ thức $b_n = b_{n-1} + (n-1)!$ với $b_1 = 1! \cdot a_1 = 2026$.
Do đó, ta có:

$$b_k = b_1 + \sum_{i=1}^{k-1} i! = 2026 + \sum_{i=1}^{k-1} i!$$

Do đó, số hạng tổng quát của dãy số là:

$$a_k = \frac{2026 + \sum_{i=1}^{k-1} i!}{k!}$$

Bất đẳng thức $2026a_k < 1$ tương đương với:

$$2026^2 + 2026 \sum_{i=1}^{k-1} i! < k! \quad (*)$$

- Với $k \leq 2026$, do riêng số hạng $2026 \cdot (k-1)! \geq k!$ nên $(*)$ không thỏa mãn.
- Với $k = 2027$, $(*)$ trở thành:

$$2026^2 + 2026 \cdot 2026! + 2026 \sum_{i=1}^{2025} i! < 2027!$$

$$\Leftrightarrow 2026^2 + 2026 \sum_{i=1}^{2025} i! < 2026!$$

Dễ thấy vô lý vì vế trái chứa $2026 \cdot 2025! = 2026!$. Do đó $k = 2027$ không thỏa mãn.

- Với $k = 2028$, $(*)$ trở thành:

$$2026^2 + 2026 \cdot 2027! + 2026 \sum_{i=1}^{2026} i! < 2028!$$

$$\Leftrightarrow \frac{2026^2}{2027!} + 2026 \sum_{i=1}^{2026} \frac{i!}{2027!} < 2028$$

$$\Leftrightarrow \frac{2026^2}{2027!} + \frac{2026}{2027} + 2026 \sum_{i=1}^{2025} \frac{i!}{2027!} < 2028 \quad (**)$$

Ta có đánh giá sau với mọi $1 \leq i \leq 2025$:

$$\frac{i!}{2027!} = \frac{1}{(i+1)(i+2)\dots 2027} < \frac{1}{2^{2027-i}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2025} \frac{i!}{2027!} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2026}} < \frac{1}{2}$$

Khi đó vế trái của $(**)$ thỏa mãn:

$$\text{VT}_{(**)} < \frac{2026^2}{2027!} + \frac{2026}{2027} + 2026 \cdot \frac{1}{2} < 0 + 1 + 1013 = 1014 < 2028$$

Bất đẳng thức $(**)$ đúng, đồng nghĩa $k = 2028$ thỏa mãn yêu cầu.
Vậy $k_{\min} = 2028$

Câu 3:

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(yf(x+y) + f(x)\big) = 4x + 2yf(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cách 1:
Kí hiệu $P(x, y)$ là phép thế x, y vào phương trình (1).
$P(x, 0) \Rightarrow f(f(x)) = 4x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Do đó f là một đơn ánh trên $\mathbb{R}$.
Thế $x \to 0$ vào hệ thức trên, ta được $f(f(0)) = 0$. Đặt $f(0) = a$ thì $f(a) = 0$.
$P(0, y) \Rightarrow f(yf(y) + f(0)) = 2yf(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$.
Mặt khác, từ $f(f(x)) = 4x$, thay $x = a$ ta có:

$$f(f(a)) = 4a \Rightarrow f(0) = 4a \Rightarrow a = 4a \Rightarrow a = 0$$

Nên $a = 0$, tức là $f(0) = 0$.
Do đó:

$$f(yf(y)) = 2yf(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Thử với $y = \frac{1}{2}$, ta được $f\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Vì f là đơn ánh nên:

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Suy ra:

$$f(1) = f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$P(x, 1-x) \Rightarrow f\left((1-x)f(1) + f(x)\right) = 4x + 2(1-x)f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(f(x) + 2(1-x)) = 4x + 4(1-x) = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Mà $4 = f(f(1)) = f(2)$, do đó:

$$f(f(x) + 2 - 2x) = f(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vì f là đơn ánh nên:

$$f(x) + 2 - 2x = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{hay } f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Thử lại vào phương trình (1), ta thấy hàm số này thỏa mãn.
Kết luận: Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Cách 2:
Để ý

$$P(x, y-x) \Rightarrow f((y-x)f(y) + f(x)) = 4x + 2(y-x)f(y) \quad (*)$$

vì f toàn ánh nên tồn tại c sao cho $f(c) = 2$.
Thế $y \to c$ vào $(*)$ ta được:

$$f((c-x)f(c) + f(x)) = 4x + 2(c-x)f(c)$$

$$\Rightarrow f(2(c-x) + f(x)) = 4x + 4(c-x) = 4c = f(f(c)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

vì f đơn ánh nên

$$2(c-x) + f(x) = f(c) = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 2 - 2c = 2x + k \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{với k là h/số thực}$$

Thử lại, ta được $k = 0$.
Kết luận: Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 4:

Cho n số nguyên dương đôi một phân biệt $a_1, \ldots, a_n$. Đặt

$$b_i = (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n).$$

Chứng minh rằng $(n-1)!$ là ước của $\text{lcm}(b_1, \ldots, b_n)$, trong đó $\text{lcm}(b_1, \ldots, b_n)$ là bội chung nhỏ nhất của các số nguyên $b_1, \ldots, b_n$.

Để chứng minh $(n-1)!$ là ước của $\text{lcm}(b_1, \ldots, b_n)$, ta cần chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $(n-1)!$ không vượt quá số mũ của p trong $\text{lcm}(b_1, \ldots, b_n)$.

Ta có:

$$v_p((n-1)!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor$$

Mặt khác, ta có:

$$v_p\big(\text{lcm}(b_1, \ldots, b_n)\big) = \max_{1 \le i \le n} v_p(b_i)$$

Do đó, bài toán quy về chứng minh tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho:

$$v_p(b_i) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor \quad (*)$$

Đặt tập hợp ban đầu là $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, rõ ràng số phần tử $|A_0| = n$.

- **Xét modulo p:** Chia n phần tử của A_0 vào p lớp thặng dư modulo p.
  Theo nguyên lý Dirichlet, lớp thặng dư chứa nhiều phần tử nhất sẽ có ít nhất $\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$ phần tử.
  Gọi A_1 là tập hợp các phần tử thuộc lớp thặng dư có nhiều phần tử nhất này. Ta có:

$$|A_1| \ge \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil \implies |A_1| - 1 \ge \left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor$$

- **Xét modulo p^2:** Ta chỉ chia các phần tử của tập A_1 vào các lớp thặng dư modulo p^2.
  Gọi A_2 là tập hợp các phần tử thuộc lớp thặng dư modulo p^2 có nhiều phần tử nhất được rút ra từ A_1.
  Theo nguyên lý Dirichlet, ta có:

$$|A_2| - 1 \geq \left\lfloor \frac{|A_1| - 1}{p} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{\lfloor (n-1)/p \rfloor}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{p^2} \right\rfloor$$

- **Tổng quát modulo p^k:** Tiếp tục quá trình này, ta xây dựng được dãy các tập hợp con lồng nhau $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \ldots$ sao cho mọi phần tử trong A_k đều đồng dư với nhau modulo p^k, và số lượng phần tử luôn thỏa mãn:

$$|A_k| - 1 \geq \left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor$$

Chọn phần tử a_i là phần tử nằm trong giao của tất cả các tập hợp này ($a_i \in \bigcap_{k \geq 1} A_k$).

Đánh giá giá trị $v_p(b_i)$:

Theo định nghĩa của b_i, ta tính được $v_p(b_i)$ như sau:

$$v_p(b_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\text{Số lượng } j \neq i \text{ sao cho } a_j \equiv a_i \pmod{p^k} \Big)$$

Do cách chọn $a_i \in A_k$, nên tất cả các phần tử khác thuộc tập A_k đều đồng dư với a_i modulo p^k. Số lượng các phần tử này chính là $|A_k| - 1$. Do đó:

$$v_p(b_i) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (|A_k| - 1) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor$$

Bất đẳng thức $(*)$ được chứng minh. Từ đó ta suy ra:

$$\max_{1 \leq i \leq n} v_p(b_i) \geq v_p((n-1)!) \implies v_p(\text{lcm}(b_1, \ldots, b_n)) \geq v_p((n-1)!)$$

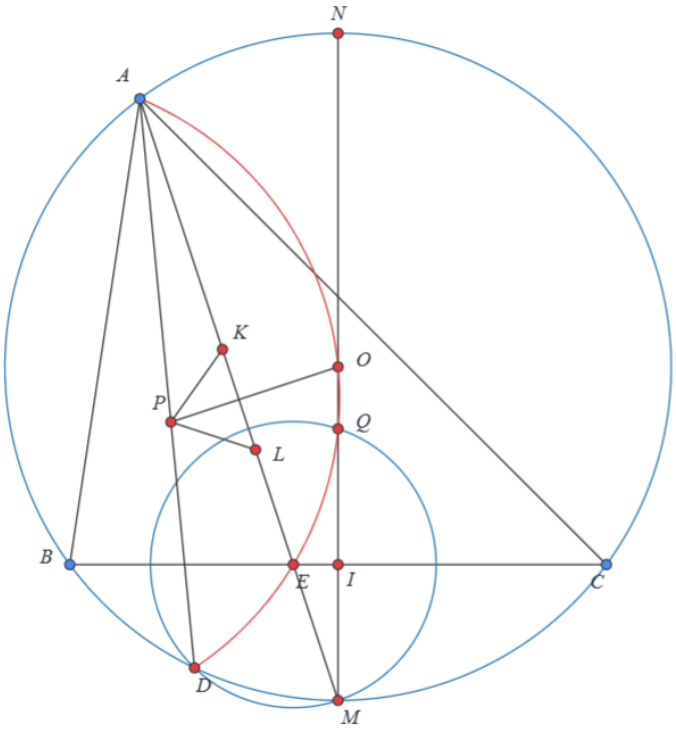
Điều này đúng với mọi số nguyên tố p, do đó $(n-1)!$ là ước của $\text{lcm}(b_1, \ldots, b_n)$. (đpcm)

Câu 5:

Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M. Đường tròn tâm E bán kính EM cắt cung nhỏ BC của đường tròn (O) và tia MO tại các điểm thứ hai tương ứng là D và Q. Lấy điểm P thuộc đoạn thẳng AD ($P \neq A, P \neq D$) sao cho $\widehat{ABP} = \widehat{ACP}$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, Q, D đồng viên.

b) Gọi giao điểm của AM với BP, CP tương ứng là K, L. Chứng minh rằng OP là đường trung trực của đoạn thẳng KL.



a) Gọi MO cắt BC, (O) tại I, N
Ta có $ME \cdot MA = MB^2 = MI \cdot MN = MI \cdot 2MO = MO \cdot MQ$
Do đó A, E, Q, O đồng viên (1)
Vì (E, EM) cắt (O) tại D, M nên OE là trung trực DM
$\Rightarrow \angle DOE = \dfrac{\angle DOM}{2} = \angle DAM = \angle DAE$
Do đó A, E, D, O đồng viên (2)
Từ (1) và (2) suy ra A, E, Q, D đồng viên.

b) Gọi Q' là điểm liên hợp đẳng giác với P trong tam giác ABC.
Do AP và AQ đối xứng với nhau qua phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ nên Q' thuộc đường thẳng AQ.

Mà Q' lại thuộc đường trung trực của $BC \implies Q \equiv Q'$.

Chứng minh được $\triangle AKB \sim \triangle ALC$ nên:

$$\widehat{PKL} = \widehat{PLK} \implies PL = PK$$

Có Q và M đối xứng với nhau qua BC nên dễ dàng chứng minh được:

$$\widehat{KBM} = \widehat{ABC} = \widehat{AMC} \quad \text{và} \quad \widehat{KMB} = \widehat{ACB}$$

Suy ra $\triangle KMB \sim \triangle ACB$ và $\triangle KBM \sim \triangle LMC$.

Mà $MB = MC \implies \triangle KBM = \triangle LMC$, từ đó dẫn tới:

$$\frac{ML}{MK} = \frac{BK}{MK} = \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AL}$$

Suy ra KL và AM có chung trung điểm $\implies OK = OL$ (đpcm)

Câu 6:

Cho số nguyên dương n và tập hợp A gồm $60n+1$ số nguyên dương không vượt quá $210n$ và nguyên tố cùng nhau với 14. Chứng minh rằng trong A luôn tồn tại hai số mà một số chia hết cho ba lần số còn lại.

Nhận xét: Với mọi $x \in \mathbb{N}^*$, ta luôn viết được dưới dạng $x = 3^k \cdot m$ (trong đó $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$ và $\gcd(m,3) = 1$).
Ta gọi nhóm các số có cùng giá trị m: $\{m, 3m, 9m, 27m, \dots\}$ là một chuỗi.
Dễ dàng thấy rằng với 2 số bất kỳ trong cùng một chuỗi thì luôn có 1 số chia hết cho 3 lần số còn lại.
Số lượng chuỗi chính là số lượng các số đại diện $m \le 210n$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \gcd(m,14) = 1 \\ \gcd(m,3) = 1 \end{cases} \implies \gcd(m,42) = 1$$

Áp dụng công thức phi hàm Euler, số lượng các số m thỏa mãn trên đoạn $[1, 210n]$ là:

$$210n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 210n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = 60n$$

Vậy có tất cả $60n$ chuỗi. Mà tập hợp A gồm có $60n+1$ phần tử.
Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 1 chuỗi chứa từ 2 phần tử trở lên thuộc tập A.
Từ đó, ta có điều phải chứng minh (đpcm).

ĐÔI LỜI: Rất cảm ơn các bạn đọc luôn ủng hộ nhóm THLM Team trong suốt thời gian qua. Nhóm rất mong tiếp tục nhận được sự ủng hộ, góp ý từ thầy cô, bạn đọc và cộng đồng yêu thích Toán học để nhóm càng ngày hoàn thiện hơn. Chân thành cảm ơn!
THLM Team