SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Số báo danh
.....

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH - CHỌN ĐỘI TUYỂN THAM DỰ KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2026 - 2027

Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: 11/9/2026
(Đề thi có 03 câu, gồm 01 trang)

Câu 1 (7 điểm). Với n là số nguyên dương, xét các số thực dương $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thỏa mãn các điều kiện: a_0 là một số nguyên, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \le 1$ và $a_i \le a_{i-1} + 1$ với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Chứng minh rằng $n \le 2a_0$.

b) Tìm hằng số C nhỏ nhất để $n \le C a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ với mọi $n \ge 1$.

Câu 2 (7 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), có tâm đường tròn nội tiếp là I. Đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) và đường thẳng AI tương ứng tại G, H (G khác A).

a) Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T. Chứng minh rằng bốn điểm G, T, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Tiếp tuyến tại G của (O) cắt đường thẳng BC tại J, đường thẳng AJ cắt đường tròn (O) tại điểm K khác A. Gọi D là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DJK và đường tròn ngoại tiếp tam giác GHI tiếp xúc với nhau.

Câu 3 (6 điểm). Một *điểm lưới* là một điểm $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ sao cho x, y là các số nguyên dương không vượt quá 20. Ta nói điểm $B = (x'; y')$ nằm về phía *Đông Bắc* của điểm $A = (x; y)$ nếu $x' > x$ và $y' > y$. Ba điểm lưới A, B, C được gọi là một *bộ ba Đông Bắc* nếu B nằm về phía Đông Bắc của A và C nằm về phía Đông Bắc của B.

Một tập hợp gồm 20 điểm lưới được gọi là ***Lam Sơn*** nếu mọi đường thẳng đi qua hai điểm trong tập hợp đều không song song với các trục tọa độ, đồng thời tập hợp chứa ít nhất một *bộ ba Đông Bắc*.

a) Chứng minh rằng trong mỗi tập ***Lam Sơn*** luôn tồn tại ba điểm X, Y, Z sao cho $XY^2 \ge XZ^2 + ZY^2 + 4$.

b) Hỏi có bao nhiêu tập ***Lam Sơn***?

---------- **HẾT** ----------

- Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Số báo danh
.....

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH – CHỌN ĐỘI TUYỂN THAM DỰ KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2026 - 2027

Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: 12/9/2026
(Đề thi có 03 câu, gồm 01 trang)

Câu 4 (6 điểm). Xét các đa thức $P(x), Q(x), R(x)$ với hệ số thực có bậc không quá 2027 đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $P(x) \le Q(x) \le R(x)$.

ii) Có 1013 số thực phân biệt $x_1, x_2, \ldots, x_{1013}$ thỏa mãn $P(x_i) = R(x_i), \forall i = 1,2,\ldots,1013$.

a) Chứng minh rằng: nếu tồn tại số thực x_0 khác tất cả các số $x_1, x_2, \ldots, x_{1013}$ và thỏa mãn $P(x_0) + R(x_0) = 2Q(x_0)$ thì $P(x) + R(x) = 2Q(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Giả sử $P(x), Q(x), R(x)$ đôi một phân biệt và $R(x)$ có bậc lẻ. Tồn tại hay không đa thức $Q(x)$ sao cho $R(x) - P(x)$ chia hết cho $Q(x)$?

Câu 5 (7 điểm). Cho $n > 1$ là một số nguyên lẻ, ta viết $n = 2^s d + 1$ trong đó $s \ge 1$ và d là số nguyên dương lẻ. Với mỗi số nguyên a thỏa mãn $\gcd(a,n) = 1$, ta nói a *có liên hệ* với n nếu $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ hoặc trong dãy $a^d, a^{2d}, a^{4d}, \ldots, a^{2^{s-1}d}$ có đúng một số hạng đồng dư với -1 theo modulo n. Chứng minh rằng n là số nguyên tố khi và chỉ khi với mọi số nguyên a thỏa mãn $\gcd(a,n) = 1$ đều có *liên hệ với* n.

Câu 6 (7 điểm). Tìm số nguyên dương N nhỏ nhất sao cho tồn tại 2026 số nguyên không âm liên tiếp mà tổng tất cả các chữ số của chúng bằng N.

---------- **HẾT** ----------

- Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.

Chương 1

CHỌN ĐTQG THANH HOÁ 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Thanh Hoá TST - P1)

Với n là số nguyên dương, xét các số thực dương $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thỏa mãn các điều kiện: a_0 là một số nguyên, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 1$ và $a_i \leq a_{i-1} + 1$ với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Chứng minh rằng $n \leq 2a_0$.
2. Tìm hằng số C nhỏ nhất để $n \leq C \cdot a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ với mọi $n \geq 1$.

Lời giải.

Vì a_0 là số nguyên dương nên $a_0 \geq 1$. Từ giả thiết $a_i \leq a_{i-1} + 1$, bằng quy nạp ta có $a_i \leq a_0 + i$ với mọi i.

1. Giả sử ngược lại rằng $n \geq 2a_0 + 1$. Khi đó

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^{2a_0+1} \frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^{2a_0+1} \frac{1}{a_0 + i} \geq \frac{(2a_0+1)^2}{\sum_{i=1}^{2a_0+1} (a_0 + i)} = 1$$

Tuy nhiên trong bất đẳng thức trên dấu bằng không xảy ra, do đó mâu thuẫn hay $n \leq 2a_0$.

2. Ta có $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_0 + i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_0 + i)} = \frac{n}{a_0 + \frac{n+1}{2}}$ nên $\frac{n}{a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq 1 + \frac{n+1}{2a_0}$.

- Nếu $a_0 \geq 2$, theo câu trên ta có $n \leq 2a_0$, do đó $\frac{n}{a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq 2 + \frac{1}{2a_0} \leq \frac{9}{4} < \frac{12}{5}$.
- Xét $a_0 = 1$. Khi đó $n \leq 2$.
  - Nếu $n = 1$, vì $a_1 \leq 2$ nên $\frac{n}{a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} = a_1 \leq 2 < \frac{12}{5}$.
  - Nếu $n = 2$, ta có $a_1 \leq 2$ và $a_2 \leq a_1 + 1 \leq 3$. Bởi vậy $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ suy ra
$$\frac{n}{a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq \frac{2}{5/6} = \frac{12}{5}.$$

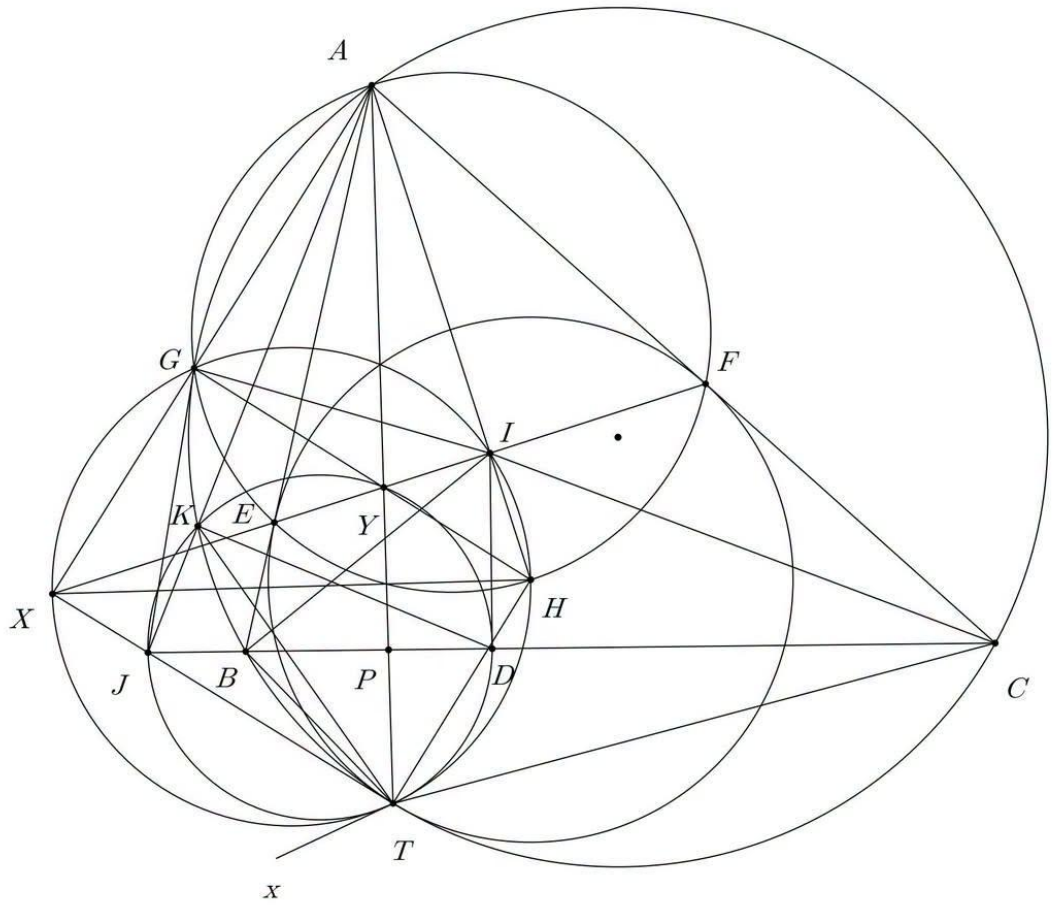
Như vậy, với mọi dãy thỏa mãn giả thiết, ta đều có $n \leq \frac{12}{5} a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$.

Cuối cùng, chọn $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ để thấy hằng số nhỏ nhất là $\boxed{C = \frac{12}{5}}$

Bài toán 0.2. **(Lim Olympic - Thanh Hoá TST - P2)**

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), có tâm đường tròn nội tiếp là I. Đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt AB, AC lần lượt tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) và đường thẳng AI tương ứng tại G, H $(G \neq A)$.

1. Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T. Chứng minh rằng bốn điểm G, T, H, I cùng thuộc một đường tròn.
2. Tiếp tuyến tại G của (O) cắt đường thẳng BC tại J; đường thẳng AJ cắt đường tròn (O) tại điểm K khác A. Gọi D là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DJK và đường tròn ngoại tiếp tam giác GHI tiếp xúc với nhau.



Lời giải.

1. Ta dễ có tính chất của đường tròn *Mixtilinear* là H là tâm (EFT). Xét tâm đẳng phương của $(AGEF)$, (EFT) và (O) ta có AG cắt EF tại X thì XT là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow 4$ điểm X, I, H, T cùng nằm trên (XH).

2 **Cách 1:** Xét cực và đối cực của (EFT) có X nằm trên đường đối cực của A là EF mà XT là tiếp tuyến của $(EFT) \Rightarrow AT$ là đường đối cực của X. Gọi EF cắt AT tại $Y \Rightarrow (XYEF) = -1 \Rightarrow (GTBC) = A(XYEF) = -1 \Rightarrow$ Tứ giác $GBTC$ điều hòa $\Rightarrow JT$ là tiếp tuyến của (O) và (EFT).

Ta có $\dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{\sin C}{\sin B} \cdot \dfrac{\cot(B/2)}{\cot(C/2)} = \dfrac{2.\sin(C/2).\cos(C/2)}{2\sin(B/2).\cos(C/2)} \cdot \dfrac{\cot(B/2)}{\cot(C/2)} = \dfrac{\sin^2(C/2)}{\cos^2(B/2)} = \dfrac{IB^2}{IC^2}$.

Lại có $\Delta BEI \sim \Delta IFC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{FC} = \dfrac{IB^2}{IC^2}$ kết hợp với tứ giác $GBTC$ điều hòa

và $\Delta GEB \sim \Delta GFC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{GB}{GC} = \dfrac{BE}{CF} \Rightarrow \dfrac{TB}{TC} = \dfrac{IB^2}{IC^2} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{DB}{DC}$.

Theo bổ đề cát tuyến và JT là tiếp tuyến của (BTC) ta cũng có

$\dfrac{JB}{JC} = \dfrac{TB^2}{TC^2}$ và $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{AB \cdot TB}{AC \cdot TC} \Rightarrow \dfrac{JB}{JC} \cdot \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{AC}{AB} \cdot \dfrac{TB}{TC} = \dfrac{DB}{DC}$

$\Rightarrow (BC, JP) = (BC, D) \Rightarrow JD \cdot JP = JB \cdot JC$ ($Maclaurin$ mở rộng).

Ta có $JT^2 = JK \cdot JA = JB \cdot JC = JP \cdot JD$ nên theo phép nghịch đảo tâm J phương tích JT^2 ta có T nằm trên (JKD) do A, P, T thẳng hàng.

Kẻ tiếp tuyến Tx của $(TJD) \Rightarrow \angle xTX = \angle XTJ = \angle JKT = 180^\circ - \angle AKT = 180^\circ - \angle AGT = \angle XGT \Rightarrow Tx$ cũng là tiếp tuyến của (XGT) nên ta có hai đường tròn này tiếp xúc với nhau tại T.

Cách 2: (Lời giải của bạn Đỗ Đức Việt Hưng)

Từ kết quả của câu 1, H là tâm của (O_1); do đó E, F lần lượt là các tiếp điểm của (O_1) với AB, AC.

Ta có $\angle ETA = \angle BET - \angle EAT = \angle EFT - \angle BAT$. Mặt khác, vì (O_1) tiếp xúc trong với (O) tại T, nên $\angle ETB = \angle EFT - \angle BAT$. Suy ra $\angle ETA = \angle ETB$, tức là TE là phân giác của $\angle BTA$.

Bởi định lý đường phân giác, ta có $\dfrac{TB}{TA} = \dfrac{EB}{EA}$.

Lại có $\angle EIB = \angle AIB - 90^\circ = \angle ICA$. Do I là tâm nội tiếp, $\angle AIC = 90^\circ + \angle IBC = 180^\circ - \angle DIB$.

Dùng định lý sin trong các tam giác IEB, IEA và tam giác vuông IDB, ta được

$$\frac{EB}{EA} = \frac{\sin\angle EIB \cdot IB}{\sin\angle AIE \cdot IA} = \frac{\sin\angle ICA \cdot IB}{IA} = \frac{\sin\angle AIC \cdot IB}{AC} = \frac{\sin\angle DIB \cdot IB}{AC} = \frac{DB}{AC}.$$

Vì thế $\dfrac{TB}{TA} = \dfrac{DB}{AC}$. Hơn nữa, $\angle TBD = \angle TBC = \angle TAC$, cho nên $\triangle TDB \sim \triangle TCA$.

Do đó $\angle TDJ = \angle TDB = \angle TCA = \angle JKT \implies T \in (DKJ)$. Ta có:

$$HI \cdot HA = HE^2 = HT^2 \implies \triangle HIT \sim \triangle HTA \implies \angle HIT = \angle HTA$$

Ta có: $\angle GBE = \angle GBA = \angle GCA = \angle GCF$ và $\angle GFC = 180^\circ - \angle GFA = 180^\circ - \angle GEA = \angle GEB$

$\implies \triangle GEB \sim \triangle GFC \implies \dfrac{GB}{GC} = \dfrac{BE}{CF}$.

Ta cần chứng minh JT là tiếp tuyến của (O) tức là ta cần chứng minh:

$$\frac{GB^2}{GC^2} = \frac{JB}{JC} = \frac{TB^2}{TC^2} \iff \frac{TB}{TC} = \frac{GB}{GC} = \frac{BE}{CF} \iff \frac{TB}{BE} = \frac{TC}{CF}$$

Theo định lí sin, ta có: $\dfrac{TB}{BE} = \dfrac{\sin TEB}{\sin BTE}; \dfrac{TC}{CF} = \dfrac{\sin TFC}{\sin FTC}$.

Chứng minh tương tự trên ta có TE là phân giác $\angle BTA$ và TF là phân giác $\angle CTA$.

Khi này ta cần chứng minh

$$\frac{\sin TEB}{\sin BTE} = \frac{\sin TFC}{\sin FTC} \iff \frac{\sin AET}{\sin ETA} = \frac{\sin AFT}{\sin FTA} \iff \frac{TA}{AE} = \frac{TA}{AF}$$

(đúng do $AE = AF$), ta cần chứng minh (DKJ) tiếp xúc với (GHI) tức là chứng minh:

$$\angle KJT - \angle HIT = \angle HTK \iff \angle KJT - \angle HIT = \angle HTA + \angle KTA$$

$$\iff 180^\circ - \angle JKT - \angle JTK - \angle HIT = \angle HTA + \angle KTA$$

$$\iff \angle AKT - \angle KAT - \angle KTA = \angle HTA + \angle HIT$$

$$\iff 2\angle AKT - 180^\circ = 2\angle HIT \iff \angle AGT - 90^\circ = \angle HIT \iff \angle HGT = \angle HIT$$

(luôn đúng do $JGHT$ là tứ giác nội tiếp). Vậy (DKJ) tiếp xúc với (GHI).

Bài toán 0.3. **(Lim Olympic - Thanh Hoá TST - P3)**

Một **điểm lưới** là một điểm $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ sao cho x, y là các số nguyên dương không vượt quá 20. Ta nói điểm $B = (x'; y')$ nằm về phía Đông Bắc của điểm $A = (x; y)$ nếu $x' > x$ và $y' > y$. Ba điểm lưới A, B, C được gọi là một **bộ ba Đông Bắc** nếu B nằm về phía Đông Bắc của A và C nằm về phía Đông Bắc của B. Một tập hợp gồm 20 điểm lưới được gọi là **Lam Sơn** nếu mọi đường thẳng đi qua hai điểm trong tập hợp đều không song song với các trục tọa độ, đồng thời tập hợp chứa ít nhất một bộ ba Đông Bắc.

1. Chứng minh rằng trong mỗi tập Lam Sơn luôn tồn tại ba điểm X, Y, Z sao cho
$$XY^2 \geq XZ^2 + ZY^2 + 4.$$
2. Hỏi có bao nhiêu tập Lam Sơn?

Lời giải.

1. Chọn một bộ ba Đông Bắc A, B, C của tập hợp và viết
$$B - A = (u, v), \qquad C - B = (p, q).$$
Khi đó u, v, p, q đều là các số nguyên dương. Vì thế
$$AC^2 - AB^2 - BC^2 = (u+p)^2 + (v+q)^2 - (u^2+v^2) - (p^2+q^2) = 2(up+vq) \geq 4.$$

2. Vì không có đường thẳng qua hai điểm nào song song với một trục tọa độ nên các hoành độ đôi một khác nhau và các tung độ đôi một khác nhau. Vì tập hợp có 20 điểm nên sau khi sắp xếp các điểm theo hoành độ tăng dần, tập hợp bao gồm các điểm dạng
$$P_i = (i, \pi_i), \qquad 1 \leq i \leq 20,$$
trong đó $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{20})$ là một hoán vị của $(1, 2, \ldots, 20)$.

Ba điểm P_i, P_j, P_k với $i < j < k$ tạo thành một bộ ba Đông Bắc khi và chỉ khi $\pi_i < \pi_j < \pi_k$.

Ta có kết quả sau về số Catalan:

Bổ đề 0.1.

Số hoán vị $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ của $(1, 2, \ldots, n)$ sao cho không tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ thoả mãn điều kiện $\pi_i < \pi_j < \pi_k$ bằng $\dfrac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Chứng minh. Gọi C_n là số lượng hoán vị như trên của tập hợp $(1, 2, \ldots, n)$.

Trước hết, ta sẽ đưa bài toán về việc đếm các hoán vị không tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ sao cho $\pi_i < \pi_k < \pi_j$. Ta gọi π_i là một **LIM** nếu $\pi_i < \pi_j$ với mọi $j < i$.

Xét một hoán vị π không tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ sao cho $\pi_i < \pi_j < \pi_k$. Ta có nhận xét rằng các

phần tử không phải **LIM** phải xuất hiện theo thứ tự giảm dần.

Thật vậy, giả sử có hai vị trí $i < j$ sao cho π_i, π_j đều không phải **LIM** và $\pi_i < \pi_j$. Vì π_i không phải **LIM** nên tồn tại $h < i$ sao cho $\pi_h < \pi_i$. Khi đó $h < i < j$ và $\pi_h < \pi_i < \pi_j$, vô lý.

Do đó, một hoán vị không tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ sao cho $\pi_i < \pi_j < \pi_k$ được xác định duy nhất nếu biết vị trí và giá trị của các **LIM**: các số còn lại chỉ cần được điền vào các vị trí còn trống theo thứ tự giảm dần.

Bây giờ, vẫn giữ nguyên vị trí và giá trị của các **LIM**. Ta đi từ trái sang phải qua các vị trí còn trống; tại mỗi vị trí, nếu m là **LIM** gần nhất ở bên trái, ta điền số nhỏ nhất chưa được sử dụng và lớn hơn m.

Hoán vị thu được không tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ sao cho $\pi_i < \pi_k < \pi_j$. Thật vậy, giả sử tồn tại $i < j < k$ sao cho $\pi_i < \pi_k < \pi_j$. Gọi m là **LIM** gần nhất đứng trước vị trí j. Khi đó $m \le \pi_i < \pi_k < \pi_j$. Nhưng tại thời điểm điền vào vị trí j, số π_k vẫn chưa được sử dụng và lớn hơn m, trái với cách chọn π_j là số nhỏ nhất chưa được sử dụng và lớn hơn m.

Ngược lại, từ một hoán vị không tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ sao cho $\pi_i < \pi_k < \pi_j$, ta giữ nguyên các **LIM** và điền các số còn lại theo thứ tự giảm dần. Theo nhận xét trên, ta thu được duy nhất một hoán vị không tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ sao cho $\pi_i < \pi_j < \pi_k$.

Như vậy, tồn tại một song ánh giữa hai tập hoán vị trên. Do đó, ta chỉ cần đếm số hoán vị không tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ sao cho $\pi_i < \pi_k < \pi_j$, và vẫn ký hiệu số lượng này là C_n.

Xét một hoán vị $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ thỏa mãn điều kiện trên. Giả sử $\pi_k = n$. Khi đó, hoán vị được chia thành hai phần:

- Phần bên trái L gồm $k-1$ phần tử đứng trước n: $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-1})$.
- Phần bên phải R gồm $n-k$ phần tử đứng sau n: $(\pi_{k+1}, \ldots, \pi_n)$.

Từ đây ta suy ra được:

- Mọi phần tử nằm ở bên trái n trong L bắt buộc phải lớn hơn mọi phần tử nằm ở bên phải n trong R. Thật vậy, nếu tồn tại $l \in L$ và $r \in R$ sao cho $l < r$, thì do $r < n$, ta có ba phần tử l, n, r xuất hiện theo thứ tự từ trái sang phải và thỏa mãn $l < r < n$. Khi đó tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ sao cho $\pi_i < \pi_k < \pi_j$, vô lý. Do đó, tập hợp các giá trị của L là $\{n-k+1, \ldots, n-1\}$, còn tập hợp các giá trị của R là $\{1, \ldots, n-k\}$.
- Cả hai phần L và R cũng không tồn tại ba chỉ số $i < j < k$ sao cho phần tử thứ i nhỏ hơn phần tử thứ k và phần tử thứ k nhỏ hơn phần tử thứ j.

Để ý số cách chọn phần bên trái L có độ dài $k-1$ là C_{k-1} và số cách chọn phần bên phải R có độ dài $n-k$ là C_{n-k}. Suy ra $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$, và vì $C_0 = 1$ nên đây là dãy Catalan hay $C_n = \dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$, bổ đề được chứng minh. □

Do đó, trong 20! hoán vị của $(1, 2, \ldots, 20)$, có đúng $\dfrac{1}{21}C_{40}^{20}$ hoán vị không tạo ra bộ ba Đông Bắc.

Vậy số tập hợp Lam Sơn là $\boxed{\mathbf{20! - \dfrac{1}{21}C_{40}^{20}}}$

Chương 2

CHỌN ĐTQG THANH HOÁ 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Thanh Hoá TST - P4)

Xét các đa thức $P(x), Q(x), R(x)$ với hệ số thực có bậc không quá 2027, đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $P(x) \le Q(x) \le R(x)$.
- Có 1013 số thực phân biệt $x_1, x_2, \ldots, x_{1013}$ thỏa mãn $P(x_i) = R(x_i)$ với $i = 1, 2, \ldots, 1013$.

1. Chứng minh rằng nếu tồn tại số thực x_0 khác tất cả các số $x_1, x_2, \ldots, x_{1013}$ và thỏa mãn $P(x_0) + R(x_0) = 2Q(x_0)$ thì $P(x) + R(x) = 2Q(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
2. Giả sử $P(x), Q(x), R(x)$ đôi một phân biệt và $R(x)$ có bậc lẻ. Tồn tại hay không đa thức $Q(x)$ sao cho $R(x) - P(x)$ chia hết cho $Q(x)$?

Lời giải.

Đặt $A(x) = Q(x) - P(x)$ và $B(x) = R(x) - Q(x)$ thì $A(x) \ge 0$ và $B(x) \ge 0$ với mọi x.

Tại mỗi x_i ta có $A(x_i) + B(x_i) = R(x_i) - P(x_i) = 0$ nên $A(x_i) = B(x_i) = 0$.

Mỗi nghiệm thực của một đa thức không âm đều có bội chẵn nên nếu A không đồng nhất bằng 0 thì bậc của A ít nhất là $2 \cdot 1013 = 2026$. Mặt khác, bậc của một đa thức không âm khác 0 là số chẵn và không vượt quá 2027, nên bậc của A đúng bằng 2026, tương tự với B. Đặt

$$S(x) = \prod_{i=1}^{1013} (x - x_i)^2.$$

Khi đó tồn tại các hằng số $\alpha, \beta \ge 0$ sao cho

$$A(x) = Q(x) - P(x) = \alpha S(x), \qquad B(x) = R(x) - Q(x) = \beta S(x).$$

1. Để ý $A(x_0) = B(x_0)$ nên $\alpha S(x_0) = \beta S(x_0)$. Vì $x_0 \ne x_i$ với mọi i, ta có $S(x_0) > 0$.

   Từ đó suy ra $\alpha = \beta$, do đó $P(x) + R(x) = 2Q(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Vì P, Q, R đôi một phân biệt nên $\alpha, \beta > 0$. Giả sử Q là một ước khác 0 của

   $$R - P = (\alpha + \beta)S.$$

   Khi đó $\deg Q \le 2026$. Nếu $\deg Q < 2026$, từ $R = Q + \beta S$ suy ra $\deg R = 2026$, trái với giả thiết bậc của R là lẻ. Nếu $\deg Q = 2026$, vì Q chia hết $(\alpha + \beta)S$ và hai vế có cùng bậc nên $Q = \gamma S$ với một hằng số $\gamma \ne 0$. Khi đó $R = (\gamma + \beta)S$, do đó hoặc $R \equiv 0$, hoặc $\deg R = 2026$. Cả hai khả năng đều trái với giả thiết, từ đó không tồn tại đa thức thoả mãn.

Bài toán 0.5. **(Lim Olympic - Thanh Hoá TST - P5)**

Cho $n > 1$ là một số nguyên lẻ, ta viết $n = 2^s d + 1$, trong đó $s \geq 1$ và d là số nguyên dương lẻ. Với mỗi số nguyên a thỏa mãn $\gcd(a, n) = 1$, ta nói a **có liên hệ với** n nếu $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ hoặc trong dãy $a^d, a^{2d}, a^{4d}, \ldots, a^{2^{s-1}d}$ có đúng một số hạng đồng dư với -1 theo modulo n. Chứng minh rằng n là số nguyên tố khi và chỉ khi với mọi số nguyên a thỏa mãn $\gcd(a, n) = 1$ đều có liên hệ với n.

Lời giải.

Trước hết, giả sử n là số nguyên tố. Theo định lý Fermat nhỏ, ta có

$$a^{2^s d} = a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Nếu $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ thì xong, còn nếu không, gọi t là số nhỏ nhất trong $\{1, 2, \ldots, s\}$ sao cho $a^{2^t d} \equiv 1 \pmod{n}$. Khi đó $a^{2^{t-1}d} \equiv -1 \pmod{n}$ là số duy nhất thoả mãn do $n \in \mathbb{P}$, do đó a có liên hệ với n.

Ngược lại, giả sử n là hợp số. Ta sẽ chứng minh tồn tại a không liên hệ với n.

- Nếu n có ít nhất hai ước nguyên tố phân biệt, viết $n = p^\alpha m$, trong đó $p \nmid m$ và $m > 1$.

  Theo CRT, tồn tại số nguyên dương a sao cho

  $$a \equiv 1 \pmod{p^\alpha}, \qquad a \equiv -1 \pmod{m}.$$

  Khi đó $\gcd(a, n) = 1$. Vì d lẻ, $a^d \equiv -1 \pmod{m}$, nên $a^d \not\equiv 1 \pmod{n}$. Mặt khác, mọi số $a^{2^j d}$ đều đồng dư với 1 modulo p^α, nên không số nào trong chúng có thể đồng dư với -1 modulo n.

  Vậy a không có liên hệ với n.

- Nếu $n = p^\alpha$ với p là số nguyên tố lẻ và $\alpha \geq 2$. Chọn $a = 1 + p^{\alpha-1}$.

  Ta có $p \nmid d$ vì d là ước của $n - 1$. Với mọi $j \geq 0$, khai triển nhị thức cho

  $$a^{2^j d} \equiv 1 + 2^j d\, p^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha}.$$

  Vế phải không đồng dư với 1 modulo p^α, đồng thời lại đồng dư với 1 modulo p, nên cũng không thể đồng dư với -1 modulo p^α. Do đó a không có liên hệ với n.

Trong các trường hợp, n là hợp số thì điều kiện của đề bài không thể đúng nên có điều phải chứng minh.

Bài toán 0.6. **(Lim Olympic - Thanh Hoá TST - P6)**

Tìm số nguyên dương N nhỏ nhất sao cho tồn tại 2026 số nguyên không âm liên tiếp mà tổng tất cả các chữ số của chúng bằng N.

Lời giải.

Đầu tiên ta có bổ đề sau:

Bổ đề 0.1.

Với mọi số nguyên không âm a và mọi số nguyên dương n, ta có

$$\sum_{i=0}^{n-1} S(a+i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} S(i).$$

Chứng minh. Với mỗi số nguyên không âm m, gọi $d_r(m)$ là chữ số của m tại hàng 10^r. Khi đó

$$d_r(m) = \left\lfloor \frac{m}{10^r} \right\rfloor - 10 \left\lfloor \frac{m}{10^{r+1}} \right\rfloor, \qquad S(m) = \sum_{r \geq 0} d_r(m).$$

Ta sẽ chứng minh rằng tại mỗi hàng thập phân, tổng các chữ số của đoạn $a, a+1, \ldots, a+n-1$ không nhỏ hơn tổng tương ứng của đoạn $0, 1, \ldots, n-1$. Cố định $r \geq 0$, đặt $q = 10^r$ và $P = 10q = 10^{r+1}$. Dãy các chữ số tại hàng 10^r là một dãy tuần hoàn có chu kì P. Trong một chu kì, dãy này có dạng

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{q \text{ số}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q \text{ số}}, \ldots, \underbrace{9, \ldots, 9}_{q \text{ số}}.$$

Kí hiệu một chu kì trên bởi $c_0, c_1, \ldots, c_{P-1}$. Ta có $c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_{P-1}$ và tổng của một chu kì là

$$C = \sum_{j=0}^{P-1} c_j = q(0 + 1 + \cdots + 9) = 45q.$$

Viết $n = kP + t$, trong đó $k \geq 0$ và $0 \leq t < P$. Do dãy đang xét có chu kì P, bất kì kP số hạng liên tiếp nào cũng gồm đúng k chu kì đầy đủ, nên có tổng bằng kC. Vì vậy, khi xét một đoạn gồm n số hạng liên tiếp, ta chỉ cần so sánh tổng của t số hạng còn lại.

Nếu $t = 0$ thì tổng tại hàng 10^r của mọi đoạn gồm n số hạng liên tiếp đều bằng kC, nên khẳng định hiển nhiên đúng. Xét $t > 0$. Gọi u là vị trí bắt đầu của t số hạng còn lại trong chu kì, với $0 \leq u < P$.

- Nếu $u + t \leq P$, đoạn này không đi qua chỗ chuyển từ 9 về 0 và gồm

  $$c_u, c_{u+1}, \ldots, c_{u+t-1}.$$

  Do dãy $c_0, c_1, \ldots, c_{P-1}$ không giảm, với mọi $0 \leq j < t$ ta có $c_{u+j} \geq c_j$. Bởi vậy

  $$c_u + c_{u+1} + \cdots + c_{u+t-1} \geq c_0 + c_1 + \cdots + c_{t-1}.$$

- Nếu $u + t > P$, đoạn này đi qua chỗ chuyển từ 9 về 0 và gồm

  $$c_u, c_{u+1}, \ldots, c_{P-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{u+t-P-1}.$$

  Đặt $v = u + t - P$. Phần bù của đoạn trên trong cả chu kì là

  $$c_v, c_{v+1}, \ldots, c_{u-1},$$

  gồm đúng $P - t$ số hạng. Do $u < P$ nên $v < t$. Để ý với mọi $0 \leq j < P - t$ ta có $c_{v+j} \leq c_{t+j}$. Suy ra

  $$c_v + c_{v+1} + \cdots + c_{u-1} \leq c_t + c_{t+1} + \cdots + c_{P-1}.$$

  Lấy tổng cả chu kì trừ hai vế, ta được

  $$c_u + \cdots + c_{P-1} + c_0 + \cdots + c_{v-1} \geq c_0 + c_1 + \cdots + c_{t-1}.$$

Như vậy, trong cả hai trường hợp, tổng của t số hạng liên tiếp bất kì trong chu kì đều không nhỏ hơn tổng của t số hạng đầu tiên. Do đó

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_r(a+i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} d_r(i).$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi $r \geq 0$. Chọn R đủ lớn để $a + n - 1 < 10^{R+1}$. Khi đó tất cả các chữ số ở những hàng cao hơn 10^R đều bằng 0. Vì vậy bổ đề được chứng minh do

$$\sum_{i=0}^{n-1} S(a+i) = \sum_{r=0}^{R} \sum_{i=0}^{n-1} d_r(a+i) \geq \sum_{r=0}^{R} \sum_{i=0}^{n-1} d_r(i) = \sum_{i=0}^{n-1} S(i).$$

□

Áp dụng bổ đề với $n = 2026$, tổng chữ số của bất kì 2026 số nguyên không âm liên tiếp nào cũng không nhỏ hơn $\sum_{i=0}^{2025} S(i) = \sum_{i=0}^{999} S(i) + \sum_{i=1000}^{1999} S(i) + \sum_{i=2000}^{2009} S(i) + \sum_{i=2010}^{2019} S(i) + \sum_{i=2020}^{2025} S(i) = 13500 + 14500 + 65 + 75 + 39 = 28179$, vì thế ta suy ra được nên $N_{\min} = 28179$, và dấu bằng khi lấy 2026 số tự nhiên đầu tiên.