SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH LONG

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSGQG THPT
NĂM HỌC 2026-2027
Khóa thi ngày: 11/9/2026

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**Môn: TOÁN (Buổi thứ nhất)**
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
*(Đề thi gồm 01 trang, 04 câu)*

**Câu 1 (5,00 điểm)**

Cho dãy số $(u_n)$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n^2 + 4u_n} + u_n}{2} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Đặt $v_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{u_i^2}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$. Chứng minh rằng dãy số $(v_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Câu 2 (5,00 điểm)**

a) Giải phương trình $\sqrt{(x-3)(x+5)} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = \dfrac{10-x}{2} + \sqrt{x+12}$.

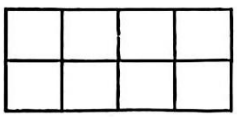
b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - x^2 y = x^2 - x + y + 1 \\ 5\sqrt{x+2} + \sqrt{y+3} = 3x^2 - y + 1 \end{cases}$.

**Câu 3 (5,00 điểm)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho parabol $(P): y^2 = 4x$. Gọi $M$ là điểm di động trên $(P)$, $T$ là điểm trên $(P)$ sao cho $OT \perp OM$ ($M$ và $T$ đều không trùng với $O$). Chứng minh rằng khi $M$ di động trên $(P)$ thì đường thẳng $MT$ luôn đi qua một điểm cố định và đồng thời trung điểm của đoạn thẳng $MT$ luôn chạy trên một parabol cố định.

**Câu 4 (5,00 điểm)**

Cho bảng ô vuông kích thước $2 \times 4$ gồm 8 ô vuông. Sử dụng 4 màu khác nhau để tí cho 8 ô sao cho mỗi ô chỉ được tô đúng một màu. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu thỏ mãn trong các cặp ô vuông có chung cạnh, có đúng một cặp được tô cùng màu, còn tí cả các cặp chung cạnh khác đều được tô khác màu?



..... **HẾT** .....

*- Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
*- Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH LONG

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSGQG THPT
NĂM HỌC 2026-2027
Khóa thi ngày: 11/9/2026

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**Môn thi: TOÁN (Buổi thứ hai)**
Thời gian: **180 phút** (*Không kể thời gian giao đề*)
*(Đề thi gồm 01 trang, 04 câu)*

**Câu 1 (5,00 điểm)**

a) Cho các số thực không âm $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 1.$$

b) Cho $x$, $y$, $z$ là các số thực dương thỏa mãn $x\left(y^2+z^2\right)=y+z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

**Câu 2 (5,00 điểm)**

Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1=1$, $u_2=3$ và công thức truy hồi

$$u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n\ ,\ \forall n\ge 1.$$

Giả sử đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc $m\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$P(k)=u_k\ ,\ \forall k\in\{m+2;\ m+3;\ldots;\ 2m+2\}.$$

a) Chứng minh rằng đa thức $Q(x)=P(x+2)-P(x+1)$ có bậc $m-1$ và thỏa mãn $Q(k)=2^{k+1}$, $\forall k\in\{m+1;\ m+2;\ldots;\ 2m\}$.

b) Chứng minh rằng $P(2m+3)=u_{2m+3}-2^{m+2}$.

**Câu 3 (5,00 điểm)**

Tìm tất cả các số nguyên dương $n$ thỏa mãn $n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ và $A(k)=3^k n-1$ là số nguyên tố với mọi $k\in\{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$.

**Câu 4 (5,00 điểm)**

Cho hai đường tròn $(O_1)$ và $(O_2)$ cắt nhau tại $P$, $Q$. Đường thẳng qua $P$ cắt $(O_1)$, $(O_2)$ lần lượt tại $A$ và $B$ (không trùng với $Q$). Trên đường tròn $(O_1)$ lấy điểm $F$ thuộc cung $\overset{\frown}{PQ}$ không chứa điểm $A$. Kẻ đường thẳng $d$ qua $F$ song song với $AB$, $d$ cắt đường tròn $(O_2)$ tại $C$, $E$ và cắt lại $(O_1)$ tại $D$ ($E$, $F$ nằm trong đoạn $CD$). Gọi $M$ là giao điểm $AD$ và $BE$, $N$ là giao điểm $BC$ và $AF$, $K$ là điểm đối xứng của $P$ qua $CD$.

a) Chứng minh $M, K, N$ thẳng hàng.

b) Chứng minh $PK$ là đường phân giác của góc $\widehat{MPN}$.

..... **HẾT** .....

*- Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
*- Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.*

Chương 1

# CHỌN ĐTQG VĨNH LONG 2026 – NGÀY 1

**Bài toán 0.1.** (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P1)

Cho dãy số $(u_n)$ được xác định bởi

$$u_1 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n^2 + 4u_n} + u_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k^2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy số $(v_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

Hiển nhiên $u_n > 0$ với mọi $n$. Từ công thức truy hồi, ta có $2u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 4u_n}$ nên

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+1} = u_n.$$

Mặt khác, $\sqrt{u_n^2 + 4u_n} > u_n$, nên $u_{n+1} > u_n$. Nếu $(u_n)$ bị chặn trên thì vì dãy này tăng, dãy có giới hạn $L \geq u_1 > 0$. Cho $n$ tiến ra vô hạn trong đẳng thức trên sẽ cho $L^2 - L^2 = L$, vô lý. Do đó $u_n \to +\infty$.

Ta có $\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$ và vì $u_1 = \frac{1}{2}$ với $n \geq 2$ nên ta suy ra

$$v_n = \frac{1}{u_1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{u_k^2} = 4 + \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} \right) = 6 - \frac{1}{u_n}.$$

Do $u_n \to +\infty$, ta được $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 6$.

**Bài toán 0.2.** (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P2)

1. Giải phương trình $\sqrt{(x-3)(x+5)} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = \frac{10-x}{2} + \sqrt{x+12}$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - x^2 y = x^2 - x + y + 1, \\ 5\sqrt{x+2} + \sqrt{y+3} = 3x^2 - y + 1. \end{cases}$

**Lời giải.**

1. Điều kiện xác định: $x \geq 3$. Để ý $x \geq 3$ không thoả mãn, xét $x > 3$, đặt

$$f(x) = \sqrt{(x-3)(x+5)} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x+5}, \qquad g(x) = \frac{10-x}{2} + \sqrt{x+12}.$$

Với $x > 3$, ta có $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x-3)(x+5)}} + \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0$ nên $f$ đồng biến trên $(3, +\infty)$.

Hơn nữa $g'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} = \frac{1}{2}\left( \frac{1}{\sqrt{x+12}} - 1 \right) < 0$ nên $g$ nghịch biến trên $(3, +\infty)$.

Vì vậy phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(3, +\infty)$.

Để ý $f(4) = g(4)$ nên $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Phương trình thứ nhất tương đương $x^3 - x^2 + x - 1 = y(x^2 + 1)$ hay $(x-1)(x^2+1) = y(x^2+1)$.

Do $x^2+1>0$, ta được $y=x-1$. Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$6\sqrt{x+2}=3x^2-x+2 \qquad (x\geq -2)$$

Đặt $t=\sqrt{x+2}\geq 0$, tức là $x=t^2-2$. Phương trình trở thành

$$3t^4-13t^2-6t+16=0$$

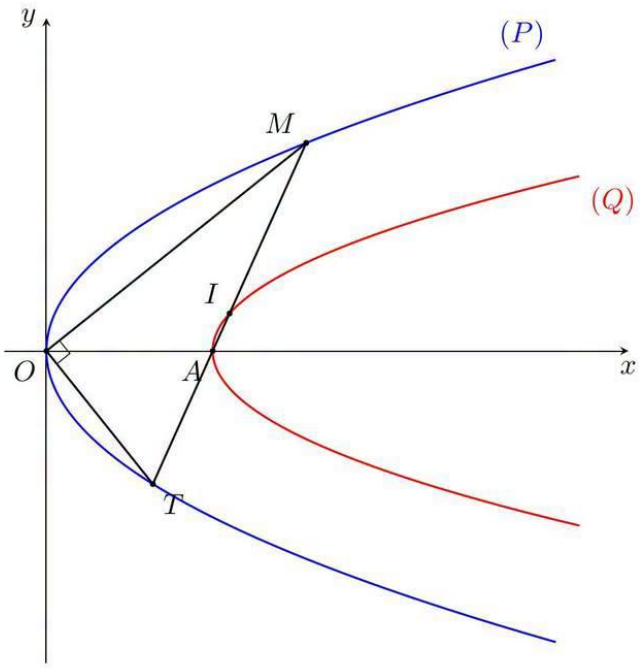
hay $(t-1)(t-2)(3t^2+9t+8)=0$. Vì $3t^2+9t+8>0$ với $t\geq 0$, nên $t=1$ hoặc $t=2$.

Thử lại để suy ra tất cả các nghiệm cần tìm là:

$$(x,y)=(-1,-2) \quad \text{hoặc} \quad (x,y)=(2,1).$$

**Bài toán 0.3.** **(Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P3)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho parabol $(P): y^2=4x$. Gọi $M$ là điểm di động trên $(P)$, $T$ là điểm trên $(P)$ sao cho $OT\perp OM$; $M$ và $T$ đều không trùng với $O$. Chứng minh rằng khi $M$ di động trên $(P)$ thì đường thẳng $MT$ luôn đi qua một điểm cố định, đồng thời trung điểm của đoạn thẳng $MT$ luôn chạy trên một parabol cố định.




**Lời giải.**

Từ việc $M$ và $T$ di động trên $(P)$ ta đặt: $M(t^2,2t)$, $T(u^2,2u)$ với $t,u\neq 0$.
Do $OM\perp OT$ nên $t^2u^2+4tu=0\Rightarrow tu=-4$.

1. Vì $tu=-4<0$ nên $t\neq u$. Đường thẳng $MT$ có phương trình $2x-(t+u)y+2tu=0$, hay $2x-(t+u)y-8=0$. Do đó $MT$ luôn đi qua điểm cố định $A(4,0)$.

2. Gọi $I(x,y)$ là trung điểm của $MT$. Ta có $x=\dfrac{t^2+u^2}{2}$, $y=t+u$, suy ra $y^2=t^2+u^2+2tu=2x-8$.

   Vậy $I$ thuộc parabol cố định $(Q): y^2=2x-8$.

   Ngược lại, với mỗi điểm $I(x,y)\in(Q)$, phương trình $z^2-yz-4=0$ có hai nghiệm thực $t,u$ khác 0 thỏa mãn $t+u=y$, $tu=-4$. Khi đó $M(t^2,2t)$, $T(u^2,2u)$ thuộc $(P)$, $OM\perp OT$ và có trung điểm là $I$. Vậy trung điểm của $MT$ luôn chạy trên parabol $(Q)$ cố định.

**Bài toán 0.4.** **(Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P4)**

Cho bảng ô vuông kích thước $2 \times 4$ gồm 8 ô vuông. Sử dụng 4 màu khác nhau để tô 8 ô sao cho mỗi ô chỉ được tô đúng một màu. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu thỏa mãn: trong các cặp ô vuông có chung cạnh, có đúng một cặp được tô cùng màu, còn tất cả các cặp chung cạnh khác đều được tô khác màu?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
| $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |

**Lời giải.**

Bảng có tổng cộng 10 cặp ô chung cạnh chia làm hai loại:

- **Loại 1:** $AB, BC, CD, DH, HG, GF, FE, EA$.
- **Loại 2:** $BF, CG$.

**Nhận xét:** Giả sử ta đã tô màu đúng cho hai ô kề nhau theo chiều dọc (ví dụ ô $B$ và $F$) bằng 2 màu khác nhau. Nếu ta ghép thêm một cột mới gồm 2 ô kề nhau (ví dụ cột gồm $C$ và $G$) vào cạnh $BF$, số cách tô màu cho $C$ và $G$ là 7 cách. Thật vậy, giả sử màu của $B$ là màu 1, màu của $F$ là màu 2. Cần tô cho $C$ (kề $B$, kề $G$) và $G$ (kề $F$, kề $C$).

- Nếu $C$ mang màu 2 (giống $F$), thì $G$ chỉ cần khác màu 2, tức là $G$ có 3 cách chọn.
- Nếu $C$ mang màu khác cả 1 và 2 (có 2 cách chọn). Khi đó $G$ phải khác màu 2 và khác màu $C$, nên $G$ có 2 cách chọn. Số cách trong trường hợp này là $2 \cdot 2 = 4$ cách.

Tổng cộng ta có $3 + 4 = 7$ cách tô cho mỗi khối ghép thêm, khi đó ta chia làm 2 trường hợp:

**Trường hợp 1:** Cặp ô cùng màu là loại 1 (có 8 cách chọn cặp). Giả sử ta chọn $A$ và $B$ cùng màu.

- Lúc này, ($A$ và $B$) kề cả $E$ và $F$, mà $E$ và $F$ cũng kề nhau, nên số cách chọn là: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ cách.
- Cột thứ ba ($C$ và $G$) được ghép vào cạnh của ($A$ và $B$). Theo nhận xét, có 7 cách tô.
- Cột thứ tư ($D$ và $H$) được ghép vào cạnh ($C$ và $G$). Theo nhận xét, có thêm 7 cách tô.

Số cách tô màu cho mỗi cặp trong trường hợp này là:

$$24 \cdot 7 \cdot 7 = 1176 \text{ (cách)}.$$

**Trường hợp 2:** Cặp ô cùng màu là loại 2 (có 2 cách chọn cặp). Giả sử ta chọn $B$ và $F$ cùng màu.

- ($B$ và $F$) sẽ kề với $A, E$ (ở cột trái) và kề với $C, G$ (ở cột phải).
- Chọn màu cho ($B$ và $F$): có 4 cách.
- Cột trái ($A$ và $E$) phải chọn cho $A$ và $E$ hai màu khác nhau nên có $3 \cdot 2 = 6$ cách.
- Cột phải ($C$ và $G$) tương tự cũng có 6 cách.
- Cột ngoài cùng ($D$ và $H$), thì theo nhận xét, có 7 cách tô.

Số cách tô màu cho mỗi cặp trong trường hợp này là:

$$4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 = 1008 \text{ (cách)}.$$

Vậy tổng số cách tô cần tính là: $8 \cdot 1176 + 2 \cdot 1008 =$ **11424**

Chương 2

# CHỌN ĐTQG VĨNH LONG 2026 – NGÀY 2

**Bài toán 0.5.** (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P5)

1. Cho các số thực không âm $a, b, c$ thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le 1.$$
2. Cho $x, y, z$ là các số thực dương thỏa mãn $x(y^2+z^2)=y+z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}+\dfrac{1}{(1+z)^2}+\dfrac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$.

**Lời giải.**

1. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$ thì $bc \le a^2$ nên có điều phải chứng minh do
$$16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=16a^2(b^2+c^2)+16b^2c^2 \le 16a^2(b+c)^2 \le (a+b+c)^4=16$$
2. Ta có $x(y+z)^2 \le 2x(y^2+z^2)=2(y+z)$ nên $y+z \le \dfrac{2}{x}$.

   Ngoài ra $P \ge \dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{2}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$ theo Cauchy.

   Mà $(1+y)(1+z) \le \dfrac{(2+y+z)^2}{4} \le \dfrac{1}{4}\left(2+\dfrac{2}{x}\right)^2=\dfrac{(x+1)^2}{x^2}$.

   Do đó $P \ge \dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{2x^2}{(1+x^2)}+\dfrac{4x^2}{(1+x)^3}=\dfrac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$.

   Xét $f(t)=\dfrac{2t^3+6t^2+t+1}{(1+t)^3}$ trên $(0,\infty)$ thì $f'(t)=\dfrac{10t-2}{(1+t)^4}=0 \iff t=\dfrac{1}{5}$.

   Do đó $P \ge f(x) \ge f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{91}{108}$, dấu bằng khi $x=\dfrac{1}{5}$, $y=z=5$.

**Bài toán 0.6.** (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P6)

Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1=1$, $u_2=3$ và công thức truy hồi
$$u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n \qquad (n \ge 1).$$
Giả sử đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc $m \in \mathbb{N}^*$ và thỏa mãn
$$P(k)=u_k \qquad \forall k \in \{m+2, m+3, \ldots, 2m+2\}.$$
1. Chứng minh rằng đa thức $Q(x)=P(x+2)-P(x+1)$ có bậc $m-1$ và thỏa mãn
$$Q(k)=2^{k+1} \qquad \forall k \in \{m+1, m+2, \ldots, 2m\}.$$
2. Chứng minh rằng $P(2m+3)=u_{2m+3}-2^{m+2}$.

**Lời giải.**

Từ công thức truy hồi ta có $u_n=2^n-1$ với mọi $n \ge 1$.

1. Vì $P$ có bậc $m$, hiệu $P(x+2)-P(x+1)$ có bậc đúng bằng $m-1$ và
$$Q(k)=P(k+2)-P(k+1)=u_{k+2}-u_{k+1}=2^{k+1}.$$

(2) Vì $Q$ có bậc $m-1$, ta có $\Delta^{(m)}Q = 0$ (sai phân cấp $m$ của $Q$). Bởi vậy

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}C_m^j Q(m+1+j) = 0.$$

Trong khi đó ta có

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}C_m^j 2^{m+j+2} = 2^{m+2}\sum_{j=0}^{m}C_m^j(-1)^{m-j}2^j = 2^{m+2}(2-1)^m = 2^{m+2}.$$

Với $j = 0, 1, \ldots, m-1$ ta có $Q(m+1+j) = 2^{m+j+2}$ nên

$$Q(2m+1) = 2^{2m+2} - 2^{m+2}.$$

Vì $P(2m+2) = u_{2m+2} = 2^{2m+2} - 1$, suy ra

$$P(2m+3) = P(2m+2) + Q(2m+1) = (2^{2m+2}-1) + (2^{2m+2} - 2^{m+2}) = u_{2m+3} - 2^{m+2}.$$

**Bài toán 0.7.** **(Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P7)**

Tìm tất cả các số nguyên dương $n$ thỏa mãn $n \equiv 2 \pmod 4$ và $A(k) = 3^k n - 1$ là số nguyên tố với mọi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Lời giải.**

Với $n = 2$, ta có $A(1) = 5$ và $A(2) = 17$ đều là số nguyên tố. Vì vậy $n = 2$ thỏa mãn.

Giả sử $n > 2$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Trước hết, xét trường hợp $3 \nmid n-1$. Đặt $d = n - 1 > 1$. Khi đó $\gcd(3, d) = 1$. Theo định lý Euler, ta có

$$3^{\varphi(d)} \equiv 1 \pmod d.$$

Chọn $k = \varphi(d)$. Ta có $1 \le k \le d - 1 = n - 2 < n$ và, do $n \equiv 1 \pmod d$,

$$A(k) = 3^k n - 1 \equiv 3^k - 1 \equiv 0 \pmod d.$$

Mặt khác $A(k) > d > 1$, nên $A(k)$ là hợp số, mâu thuẫn.

Do đó chỉ còn trường hợp $3 \mid n-1$, tức là $n \equiv 1 \pmod 3$.

Kết hợp với $n \equiv 2 \pmod 4$ và $n > 2$, ta có $n \ge 10$. Đặt $d = n - 3 \ge 7$. Khi đó $\gcd(3, d) = 1$.

Chọn $k = \varphi(d) - 1$, ta có $1 \le k \le d - 2 < n$. Vì $n \equiv 3 \pmod d$, định lý Euler cho ta

$$A(k) = 3^k n - 1 \equiv 3^{k+1} - 1 = 3^{\varphi(d)} - 1 \equiv 0 \pmod d.$$

Lại có $A(k) > d > 1$, nên $A(k)$ là hợp số và cũng có mâu thuẫn.

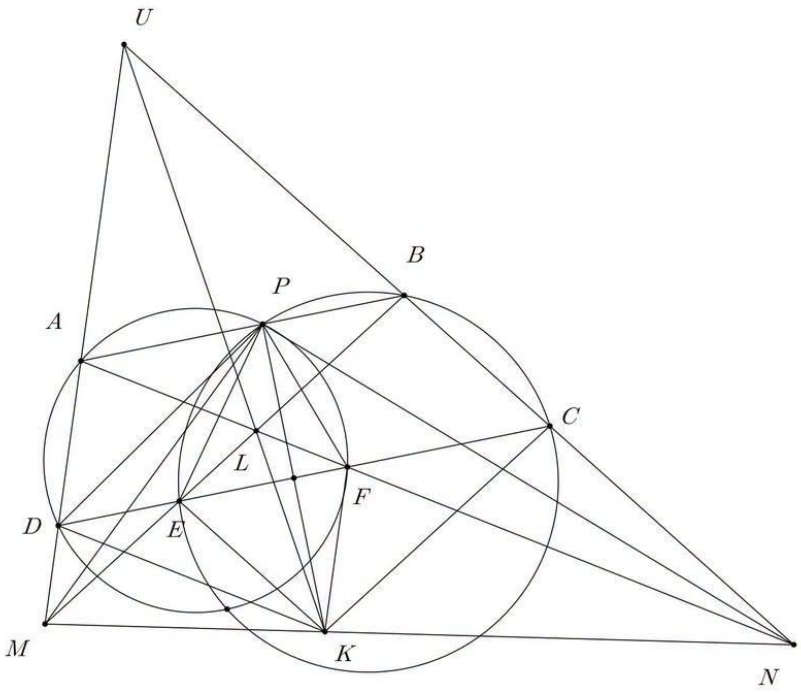
Vậy số nguyên dương duy nhất cần tìm là $\boxed{n = 2}$

**Bài toán 0.8.** **(Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P8)**

Cho hai đường tròn $(O_1)$ và $(O_2)$ cắt nhau tại $P, Q$. Đường thẳng qua $P$ cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại $A$ và $B$ (không trùng với $Q$). Trên đường tròn $(O_1)$ lấy điểm $F$ thuộc cung $\overset{\frown}{PQ}$ không chứa điểm $A$. Kẻ đường thẳng $d$ qua $F$ song song với $AB$; $d$ cắt đường tròn $(O_2)$ tại $C, E$ và cắt lại $(O_1)$ tại $D$; $E, F$ nằm trong đoạn $CD$. Gọi $M$ là giao điểm của $AD$ và $BE$, $N$ là giao điểm của $BC$ và $AF$, $K$ là điểm đối xứng của $P$ qua đường thẳng $CD$.

(1) Chứng minh $M, K, N$ thẳng hàng.

(2) Chứng minh $PK$ là đường phân giác của góc $MPN$.




**Lời giải.**

1. Ta có $APFD$ là hình thang cân $\Rightarrow DK = DP = AF$ và $AD = PF = FK$.
   $\Rightarrow ADKF$ là hình bình hành, tương tự $KEBC$ là hình bình hành $\Rightarrow KF // MA$, $KC // MB$.
   $\Rightarrow \Delta MAB$ và $\Delta KFC$ có các cạnh tương ứng song song.
   $\Rightarrow MK, AF, BC$ đồng quy tại tâm vị tự hai tam giác $\Rightarrow M, K, N$ thẳng hàng.
2. Gọi $AD$ cắt $BC$ tại $U$, ta có $\angle UAB = \angle UDC = \angle KFE$ và $\angle UBA = \angle UCD = \angle KEF$
   $\Rightarrow \Delta KEF \sim \Delta UBA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{LE}{LB} = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{KE}{UB} \Rightarrow U, L, K$ thẳng hàng.
   Vì thế theo hàng điểm tứ giác toàn phần ta có $P(AKMN) = -1$, mà $PA \perp PK$
   $\Rightarrow PK$ là phân giác $\angle MPN$.