SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TỈNH GIA LAI**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12** **NĂM HỌC 2026-2027**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn thi: **TOÁN** Thời gian: **180 phút** (*không kể thời gian giao đề*) Ngày thi thứ nhất: **06/10/2026** *Đề thi gồm 01 trang, 03 câu*

Câu 1 (*7,0 điểm*)

Cho dãy số thực (u_n) thỏa mãn:

$$u_1=2,\ (u_{n+1}+1)u_n=u_n\left(\sqrt{u_n}+1\right)^2+1,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

a) Chứng minh rằng $3n-1\le u_n<(n+1)^2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{u_1}+\frac{2}{u_2}+\cdots+\frac{n}{u_n}>\ln\frac{n+2}{2}-1,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 2 (*6,0 điểm*)

Cho tam giác ABC không cân có D, E tương ứng là chân đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt AC tại F khác A. Giả sử AB và DF cắt nhau tại I. Gọi J là giao điểm của AE và DF; S là giao điểm của AD và EF; Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF.

a) Chứng minh rằng các điểm A, B, D, J cùng thuộc một đường tròn và CI vuông góc với SQ.

b) Giả sử AE và BF cắt nhau tại X. Chứng minh rằng ba điểm C, I, X thẳng hàng.

Câu 3 (*7,0 điểm*)

Chứng minh rằng, có thể sắp tất cả các tập con của tập $S=\{1;2;3;\cdots;2027\}$ thành một dãy sao cho mỗi cặp gồm hai tập con kề nhau bất kỳ chỉ sai khác đúng một phần tử (tức là một tập thu được từ tập kia bằng cách thêm hoặc bớt một phần tử nào đó).

---------- HẾT----------

** Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;*

** Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH GIA LAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2026-2027

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **180 phút** (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ hai: **07/10/2026**
Đề thi gồm 01 trang, 03 câu

Câu 4 (*7,0 điểm*)

Xét đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$P(x)\left[P\left(x^2\right)-x\right]=P\left(x^3\right),\forall x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

a) Giả sử $P(x)$ có $\deg P\geq 1$ thỏa mãn (1). Tính $P(0)$.

b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn (1).

Câu 5 (*6,0 điểm*)

Cho tam giác ABC nhọn và không cân. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với BC,CA,AB tại D,E,F. Đường thẳng IE cắt đường tròn (I) tại điểm G khác E. BG cắt AC tại K. Gọi N là trung điểm của AC.

a) Chứng minh rằng $NE=NK$.

b) Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC theo thứ tự cắt các đường thẳng BE,BN,BG tại S,P,T khác B. Gọi M là trung điểm ST. Chứng minh rằng các điểm M,N,O,P cùng thuộc một đường tròn.

Câu 6 (*7,0 điểm*)

Ký hiệu (a,b) là ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a và b; $\delta(n)$ là tổng các ước nguyên dương của số nguyên dương n.

a) Chứng minh rằng $\delta(n)$ là số lẻ khi và chỉ khi tồn tại số tự nhiên t sao cho $\frac{n}{2^t}$ là số chính phương.

b) Cho số nguyên dương $k\geq 6$. Tồn tại hay không số nguyên dương n thỏa mãn $\left(n+i,\delta(n+i)\right)=1$, $\forall i\in\{1,2,...,k\}$, hãy giải thích?

---------- HẾT----------

** Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;*

** Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.*

Lời giải

Thực hiện bởi: THLM Team

Câu 1:

Cho dãy số thực (u_n) thỏa mãn:

$$u_1 = 2, \quad (u_{n+1}+1)u_n = u_n\left(\sqrt{u_n}+1\right)^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Chứng minh rằng $3n-1 \le u_n < (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{2}{u_2} + \cdots + \dfrac{n}{u_n} > \ln\dfrac{n+2}{2} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

a) Vì $u_1 = 2 > 0$, dễ dàng quy nạp được $u_n > 0$

Ta có:

$$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + \frac{1}{u_n}$$

Ta thấy rằng (u_n) là dãy tăng.

Ta có: $2 \le u_1 = 2 < 2^2$

Ta chứng minh quy nạp rằng $3n-1 \le u_n < (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $(*)$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k \ge 1$, tức $3k-1 \le u_k < (k+1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2\sqrt{u_k} + \frac{1}{u_n} \\ &\ge 3k - 1 + \left(\sqrt{u_k} + \sqrt{u_k} + \frac{1}{u_k}\right) \\ &\overset{AM-GM}{\ge} 3k - 1 + 3 = 3(k+1) - 1 \qquad (**) \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$u_{k+1} = u_k + 2\sqrt{u_k} + \frac{1}{u_k} < u_k + 2\sqrt{u_k} + 1 = \left(\sqrt{u_k}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow u_{k+1} < (k+1+1)^2 \qquad (***)$$

Vậy từ $(**)$ và $(***)$ ta có $(*)$ đúng với $n = k+1$ nên theo nguyên lý quy nạp ta có $3n-1 \le u_n < (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Từ kết quả câu a), ta có $u_k < (k+1)^2, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Suy ra:

$$\frac{k}{u_k} > \frac{k}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{u_k} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} \quad (1)$$

Ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{x} \ge \ln(x+1) - \ln(x), \quad \forall x > 0 \qquad (2)$$

Thật vậy, đặt $f(x) = x - \ln(1+x), \forall x \geq 0$
Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} \geq 0, \forall x \geq 0$
Vậy f tăng trên $[0; +\infty)$.
Do đó $x - \ln(1+x) = f(x) \geq f(0) = 0$
Vậy $\dfrac{1}{x} \geq \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x), \forall x > 0$
Trờ lại bài toán, từ (2) ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \geq \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+2) - \ln(k+1)] = \ln(n+2) - \ln 2 = \ln \frac{n+2}{2} \tag{3}$$

Ta có:

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\Longrightarrow -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} > -1 \tag{4}$$

Từ (1), (2), (3) và (4), ta được

$$\frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \cdots + \frac{n}{u_n} > \ln \frac{n+2}{2} - 1$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 2:

Cho tam giác ABC không cân có D, E tương ứng là chân đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt AC tại F khác A. Giả sử AB và DF cắt nhau tại I. Gọi J là giao điểm của AE và DF; S là giao điểm của AD và EF; Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF.

a) Chứng minh rằng các điểm A, B, D, J cùng thuộc một đường tròn và CI vuông góc SQ.

b) Giả sử AE và BF cắt nhau tại X. Chứng minh rằng ba điểm C, I, X thẳng hàng.

Lời giải:
a) Vì AD, AE là cặp phân giác trong, ngoài $\triangle ABC$ nên $AD \perp AE$
$AEDF$ nội tiếp nên $\angle EFD = \angle EAD = 90^\circ$ hay $EF \perp DJ$
Do đó S là trực tâm $\triangle JED$, nên JB là đường cao $\triangle JED$
$\Rightarrow ABDJ$ nội tiếp.
Gọi O là tâm JED, để ý Q, S là tâm Euler và trực tâm $\triangle JED$ nên O, Q, S thẳng hàng.
Ta có:

$$\mathcal{P}_{C/(O)} = CD \cdot CE = CF \cdot CA = \mathcal{P}_{C/(Q)} \quad \text{(AFDE nội tiếp)}$$

tương tự:

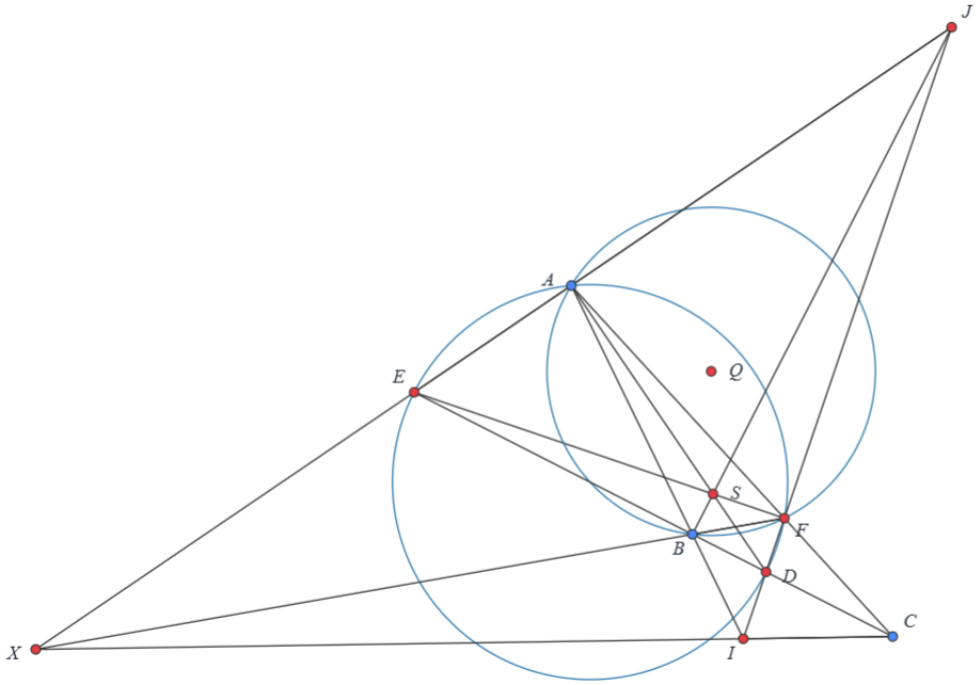
$$\mathcal{P}_{I/(O)} = ID \cdot IJ = IB \cdot IA = \mathcal{P}_{I/(Q)} \quad \text{(ABDJ nội tiếp)}$$

Từ đó, C, I thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(O), (Q)$ nên $CI \perp OQ$ hay $CI \perp SQ$ (vì O, Q, S thẳng hàng)

b) Tương tự câu a), ta có:

$$\mathcal{P}_{X/(O)} = XE \cdot XJ = XB \cdot XF = \mathcal{P}_{X/(Q)} \quad \text{(EBFJ nội tiếp)}$$

nên X thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(O), (Q)$
Suy ra C, I, X thẳng hàng.



Bình luận:

Bài toán trên thật ra là mô hình trực tâm kết hợp kiến thức về phương tích, trục đẳng phương.

Câu 3:

Chứng minh rằng, có thể sắp tất cả các tập con của tập $S = \{1; 2; 3; \ldots; 2027\}$ thành một dãy sao cho mỗi cặp gồm hai tập con kề nhau bất kỳ chỉ sai khác đúng một phần tử (tức là một tập thu được từ tập kia bằng cách thêm hoặc bớt một phần tử nào đó).

Lời giải:
Với $S_n = \{1; 2; \ldots; n\}$, có thể sắp xếp tất cả 2^n tập con của S_n thành một dãy $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ sao cho hai tập kề nhau bất kỳ chỉ khác nhau đúng một phần tử.
Với $n = 1$: các tập con của $\{1\}$ là $\varnothing$ và $\{1\}$. Dãy $\varnothing, \{1\}$ thỏa mãn vì hai tập kề nhau khác nhau đúng phần tử 1. Vậy $P(1)$ đúng.
Giả sử $P(k)$ đúng, tức là có dãy

$$A_1, A_2, \ldots, A_{2^k}$$

gồm tất cả tập con của S_k, hai tập kề nhau khác nhau đúng một phần tử. Xét $S_{k+1} = S_k \cup \{k+1\}$.
Mỗi tập con của S_{k+1} thuộc đúng một trong hai loại:

- loại 1: không chứa $k+1$, tức là các tập A_i;
- loại 2: chứa $k+1$, tức là các tập $A_i \cup \{k+1\}$.

Ta lập dãy gồm 2^{k+1} tập như sau:

$$A_1,\ A_2, \ldots, A_{2^k},\quad A_{2^k} \cup \{k+1\},\ A_{2^k-1} \cup \{k+1\}, \ldots, A_1 \cup \{k+1\}.$$

Nửa đầu liệt kê mọi tập loại 1, nửa sau liệt kê mọi tập loại 2 (theo thứ tự ngược), mỗi tập một lần.

- *Trong nửa đầu:* A_i và A_{i+1} khác nhau đúng một phần tử theo giả thiết quy nạp.
- *Ở chỗ nối giữa hai nửa:* hai tập kề nhau là A_{2^k} và $A_{2^k} \cup \{k+1\}$. Chúng khác nhau đúng phần tử $k+1$.
- *Trong nửa sau:* hai tập kề nhau là $A_{i+1} \cup \{k+1\}$ và $A_i \cup \{k+1\}$. Cả hai đều chứa $k+1$, nên sự khác nhau giữa chúng chính là sự khác nhau giữa A_{i+1} và A_i, tức là đúng một phần tử.

Vậy $P(k+1)$ đúng.
Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.
Với $n = 2027$, ta có thể sắp xếp tất cả các tập con của $S = \{1; 2; \ldots; 2027\}$ thành một dãy sao cho hai tập kề nhau bất kỳ chỉ khác nhau đúng một phần tử.

Câu 4:

Xét đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$P(x)\left[P\left(x^2\right) - x\right] = P\left(x^3\right), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

a) Giả sử $P(x)$ có $\deg P \geq 1$ thoả mãn (1). Tính $P(0)$.

b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn (1).

Lời giải:
a) Xét đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$P(x)\left[P(x^2) - x\right] = P(x^3), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Thay $x = 0$ vào (1):

$$P(0)^2 = P(0)$$

nên $P(0) = 0$ hoặc $P(0) = 1$.
Giả sử $P(0) = 0$. Viết $P(x) = x^k Q(x)$ với $k \geq 1$, $Q(0) \neq 0$. Khi đó

$$P(x^2) - x = x^{2k}Q(x^2) - x = x\left[x^{2k-1}Q(x^2) - 1\right]$$

Vế trái của (1) bằng

$$x^{k+1}\,Q(x)\left[x^{2k-1}Q(x^2) - 1\right]$$

Vì $2k - 1 \geq 1$ nên số hạng bậc thấp nhất của nó là $-Q(0)\,x^{k+1} \neq 0$

Vế phải bằng $x^{3k}Q(x^3)$, có số hạng bậc thấp nhất là $Q(0)\,x^{3k}$

$$\Rightarrow k+1=3k \Leftrightarrow k=\tfrac{1}{2} \text{ (vô lý)}$$

Vậy $P(0)\neq 0$, do đó $P(0)=1$.

b) **Trường hợp 1:** $\deg P\leq 0$ ($P\equiv c$): (1) trở thành $c(c-x)=c$ với mọi x, nên $c=0$. Vậy $P(x)=0$ là một nghiệm.

Trường hợp 2: $\deg P=n\geq 1$**.**
Gọi a là hệ số cao nhất. Vế trái có bậc $3n$ với hệ số $a\cdot a$ (vì $2n>1$), vế phải có hệ số a. Do đó $a^2=a$, suy ra $a=1$ (vì $a\neq 0$).
Giả sử $n\geq 2$.
Theo câu a), $P(0)=1\neq 0$ nên P không phải đơn thức x^n. Gọi $c\,x^m$ ($c\neq 0$, $m<n$) là số hạng có bậc cao nhất ngay sau x^n:

$$P(x)=x^n+c\,x^m+K(x)$$

Xét vế trái $P(x)\,[P(x^2)-x]$. Ngoài x^{3n}, các tích có bậc lớn nhất là:

- $x^n\cdot c\,x^{2m}$ có bậc $n+2m$,
- $c\,x^m\cdot x^{2n}$ có bậc $2n+m$,
- $x^n\cdot(-x)$ có bậc $n+1$.

Vì $m<n$ nên $2n+m>n+2m$. Vì $n\geq 2$ nên $2n+m>n+1$. Do đó hệ số của x^{2n+m} ở vế trái là $c\neq 0$.

Vế phải $P(x^3)=x^{3n}+c\,x^{3m}+\cdots$ có số hạng bậc kế tiếp là $3m<2n+m$, nên hệ số của x^{2n+m} ở vế phải bằng 0. Mâu thuẫn. Vậy $n=1$. $\Rightarrow P(x)=x+1$.
Vậy các đa thức thỏa mãn là $P(x)=0, P(x)=x+1$

Câu 5:

Cho tam giác ABC nhọn và không cân. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng IE cắt đường tròn (I) tại điểm G khác E. BG cắt AC tại K. Gọi N là trung điểm của AC.

a) Chứng minh rằng $NE=NK$.

b) Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC theo thứ tự cắt các đường thẳng BE, BN, BG tại S, P, T khác B. Gọi M là trung điểm ST. Chứng minh rằng các điểm M, N, O, P cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:
a) Qua G đường thẳng song song với AC cắt BA, BC tại X, Y
Dễ dàng chứng minh $\triangle IXG\sim\triangle AIE$ và $\triangle IYG\sim\triangle CIE$

$$\Rightarrow GX\cdot EA=GY\cdot EC=IE^2$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EC}=\frac{GY}{GX}=\frac{KC}{KA}$$

nên $AE = KC$, mà N là trung điểm AC nên $NE = NK$.

b) Ta có BN là trung tuyến của $\triangle ABC$ và $BN \cap (O) = P$.

$$\Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{BC}{BA} \quad (1)$$

Ta lại có:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{CK}{KA}$$

Áp dụng bổ đề cát tuyến, ta có:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB \cdot AS}{CB \cdot CS} \quad \text{và} \quad \frac{CK}{KA} = \frac{CB \cdot CT}{AB \cdot AT}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} &\frac{AB \cdot AS}{CB \cdot CS} = \frac{CB \cdot CT}{AB \cdot AT} \\ \Rightarrow &\frac{AB^2}{CB^2} = \frac{CT \cdot CS}{AT \cdot AS} \\ \Rightarrow &\frac{AT \cdot AS}{CT \cdot CS} = \frac{CB^2}{AB^2} = \frac{PA^2}{PC^2} \end{aligned}$$

Mặt khác, gọi $H = AC \cap ST$, ta được:

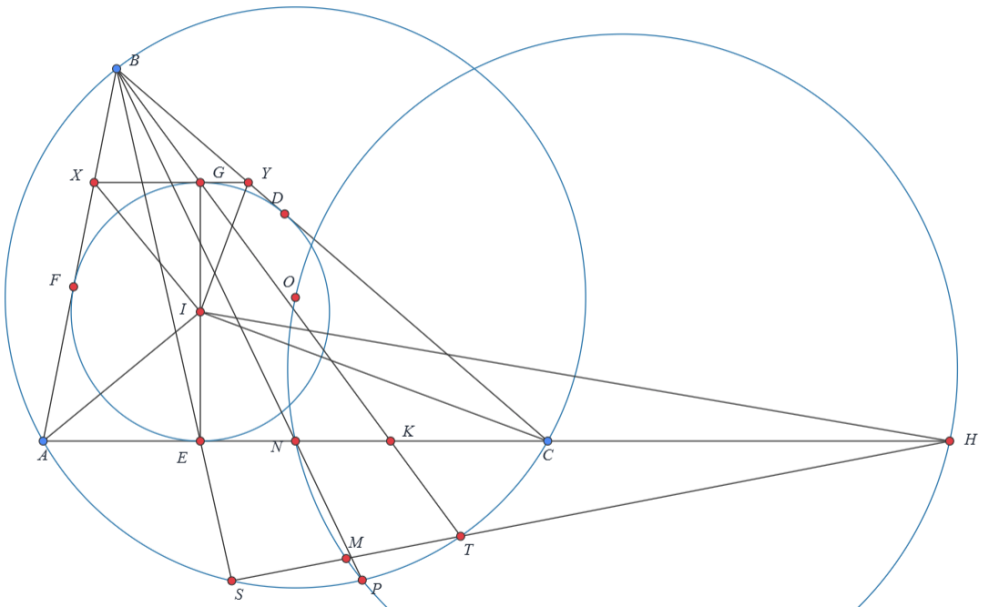
$$\frac{HC}{HA} = \frac{TC \cdot SC}{TA \cdot SA}$$

$$\Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{AT \cdot AS}{CT \cdot CS} = \frac{PA^2}{PC^2}$$

Từ các hệ thức trên, ta suy ra:

$$\Rightarrow HP \text{ là tiếp tuyến của } (O)$$

$$\Rightarrow (HPMNO) \text{ đường kính } OH \quad (\text{đpcm}).$$



Câu 6:

Ký hiệu (a, b) là ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a và b; $\delta(n)$ là tổng các ước nguyên dương của số nguyên dương n.

a) Chứng minh rằng $\delta(n)$ là số lẻ khi và chỉ khi tồn tại số tự nhiên t sao cho $\dfrac{n}{2^t}$ là số chính phương.

b) Cho số nguyên dương $k \geq 6$. Tồn tại hay không số nguyên dương n thoả mãn

$$(n+i, \delta(n+i)) = 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\},$$

hãy giải thích?

Lời giải:
a) Ta chứng minh với p là số nguyên tố lẻ thì $\delta(p^k)$ chẵn khi và chỉ khi k chẵn. Ta có:

$$\delta(p^k) = p^k + p^{k-1} + \cdots + 1 \equiv k+1 \pmod 2 \quad (\text{do có } k+1 \text{ hạng tử lẻ})$$

Nên $\delta(p^k)$ lẻ khi và chỉ khi k chẵn (đpcm).

Chiều thuận: Giả sử $\delta(n)$ là số lẻ. Đặt $n = 2^k \cdot p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ (p_i là các số nguyên tố lẻ).
Khi đó:

$$\delta(n) = \delta(2^k) \cdot \delta(p_1^{k_1}) \ldots \delta(p_m^{k_m})$$

Vì $\delta(n)$ lẻ nên $\delta(p_i^{k_i})$ lẻ với mọi i. Suy ra k_i chẵn với mọi i, do đó $\dfrac{n}{2^k}$ là số chính phương.

Chiều đảo: Giả sử tồn tại số tự nhiên t để $\dfrac{n}{2^t}$ là số chính phương.
Khi đó với mọi số nguyên tố lẻ p_i, số mũ $v_{p_i}\left(\dfrac{n}{2^t}\right)$ là số chẵn $\Rightarrow v_{p_i}(n)$ chẵn $\Rightarrow k_i$ chẵn.
$\Rightarrow \delta(p_i^{k_i})$ lẻ với mọi i.
Mà $\delta(2^k) = 1 + 2 + \cdots + 2^k$ luôn lẻ.
$\Rightarrow \delta(n) = \delta(2^k) \cdot \delta(p_1^{k_1}) \ldots \delta(p_m^{k_m})$ là số lẻ (đpcm).

b) Giả sử tồn tại số nguyên n thỏa mãn tính chất đã cho.
Vì $k \geq 6$ nên có 3 số chẵn liên tiếp $m, m+2, m+4$ thuộc tập hợp sao cho:

$$(m, \delta(m)) = 1, \quad (m+2, \delta(m+2)) = 1, \quad (m+4, \delta(m+4)) = 1$$

Do $m, m+2, m+4$ chẵn nên $\delta(m), \delta(m+2), \delta(m+4)$ phải lẻ. Áp dụng câu a, ta có:

$$m = 2^a \cdot x^2, \quad m+2 = 2^b \cdot y^2, \quad m+4 = 2^c \cdot z^2 \quad (\text{với } x, y, z \text{ lẻ})$$

Trường hợp 1: $a = 1$.
Khi đó $m \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow m+4 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow c = 1$. Ta có:

$$\frac{m}{2} = x^2 \quad \text{và} \quad \frac{m}{2} + 2 = z^2 \implies (z-x)(z+x) = 2 \quad (\text{vô lý do VT} \vdots 4)$$

Trường hợp 2: $a > 1 \Rightarrow b = 1$ và $m \vdots 4$.
Do $b = 1 \Rightarrow m + 2 = 2y^2 \Rightarrow \dfrac{m}{2} + 1 = y^2$. Vì $(m + 2, \delta(m + 2)) = 1$ nên $m + 2 \not\vdots 3$.
Mà $\dfrac{m}{2}$ chẵn $\Rightarrow y$ lẻ $\Rightarrow y^2 - 1 \vdots 8 \Rightarrow \dfrac{m}{2} \vdots 8 \Rightarrow a \geq 4$.
Do $m \vdots 16 \Rightarrow m + 4 \equiv 4 \pmod{16} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \dfrac{m}{4} + 1 = z^2$.

Xét modulo 3, trong 3 số chẵn trên phải có 1 số chia hết cho 3. Vì $m + 2 \not\vdots 3$, ta xét các khả năng:

- $m \vdots 3 \Rightarrow \delta(m) \not\vdots 3 \Rightarrow \delta(2^a) \not\vdots 3 \Rightarrow 2^{a+1} - 1 \not\vdots 3 \Rightarrow a$ chẵn.
  Vì a chẵn nên $\dfrac{m}{4}$ là số chính phương.
  Mà $\dfrac{m}{4} + 1 = z^2 \Rightarrow \dfrac{m}{4} = 0 \Rightarrow m = 0$ (vô lý).

- $m + 4 \vdots 3 \Rightarrow m + 2 = (m + 4) - 2 \equiv 1 \pmod{3}$.
  Mà $m + 2 = 2y^2 \equiv 2 \pmod{3}$ (vô lý do $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$).

Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn bài toán.